МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Радиоэлектроника»

# РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДАХ БЕЗ ПОТЕРЬ И С ПОТЕРЯМИ

Методические указания

Ростов-на-Дону
ДГТУ
2020

УДК 62

Составители: М.Ю. Звездина, Ю.А. Шокова

Расчет электромагнитного поля в средах без потерь и с потерями. Случай полного отражения: метод. указания. – Ростов-на-Дону: Донской гос. техн. ун-т, 2020. – 10 с.

Приводятся методические указания для проведения практического занятия по дисциплине «Электродинамическое моделирование».

Предназначены для магистров, обучающихся по направлению 11.04.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи.

УДК 62

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Донского государственного технического университета

Научный редактор канд. техн. наук, доцент О.Ю. Назарова

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Радиоэлектроника» канд. техн. наук,
доцент С.В. Лазаренко

В печать ___.___.20___ г.
Формат 60×84/16. Объем ___ усл. п. л.
Тираж ___ экз. Заказ № ___.

Издательский центр ДГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

## Цель работы

Привитие навыков учета особенностей влияния электрических свойств сред на процесс распространения электромагнитных волн при оценки корректности разработанных программ для моделирования электродинамических процессов.

## Содержание работы

1. Ознакомление с теоретическими особенностями представления решения задачи.
2. Ознакомление с математическим решением задачи о распространении электромагнитной волны в средах без потерь и с потерями.
3.

## Программа подготовки к работе

1 Изучить краткие сведения из теории.

2 Ознакомиться с расчетными соотношениями для электродинамической модели.

3 Провести расчеты характеристик волны при распространении в средах с потерями и без потерь.

4 Подготовиться к ответам на контрольные вопросы.

5 Подготовить бланк отчета по работе.

## Краткое описание теории

### 1 Плоские однородные волны в изотропных средах без потерь

Распространение электромагнитных волн происходит в среде, параметры которой определяются диэлектрической $\varepsilon$ и магнитной $\mu$ проницаемостями и удельной проводимостью $\sigma$ среды. В зависимости от соотношения действительной и мнимой частей относительной комплексной диэлектрической проницаемости, описываемой формулой:

$$\tilde{\varepsilon}_\alpha = \varepsilon_\alpha - i\frac{\sigma}{\omega} = \varepsilon_0\left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right) = \varepsilon_0(\varepsilon - i60\lambda_0\sigma), \qquad (1)$$

где $\lambda_0$ - длина волны в вакууме,

имеем следующее деление сред:

- среда является диэлектриком, если $\varepsilon >> 60\lambda_0\sigma$ (ток смещения превышает ток проводимости);
- среда является полупроводником, если $\varepsilon \approx 60\lambda_0\sigma$ (токи равны);
- среда является проводник, если $\varepsilon << 60\lambda_0\sigma$ (ток проводимости превышает ток смещения).

Для упрощения решения многих практически важных задач вводят понятие плоской волны. ***Плоской волной*** называют волну, фронт которой имеет бесконечную протяжённость, причём амплитуды и фазы векторов поля во всех точках фронта одинаковы. ***Волна*** называется ***однородной***, если ее амплитуда постоянна во всех точках фазового фронта, и ***неоднородной***, если ее амплитуда зависит от координат точек фазового фронта. (***Фазовым фронтом*** волны называется поверхность, проходящую через точки с одинаковыми фазами).

Плоских волн в природе не существует, т.к. потребовался бы бесконечно протяжённый источник. Из простых физических соображений очевидно, что плоскую волну можно создать только в ограниченной части пространства. Однако на большом удалении от источника волна может считаться локально плоской.

Любая волна характеризуется такими величинами как фазовая скорость, длина волны и направление распространения.

***Фазовая скорость*** распространения плоской волны, т.е. скорость движения фазового фронта, в однородной среде без потерь определяется соотношением:

$$\vec{v}_ф = \vec{i}_z\frac{\omega}{k_\beta} = \vec{i}_z\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} = \vec{v}_0\,. \qquad (2)$$

Данная скорость, находимая из уравнения движения любой точки на фазовом фронте, фаза которого неизменна.

***Длина волны***, т.е. расстояние между двумя фазовыми фронтами волны, различающимися на $2\pi$, определяется формулой:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\left|\overrightarrow{v_0}\right|}{f}. \qquad (3)$$

Назовем перпендикуляр к фронту волны ***лучом***. Его направление обозначим ортом $\overrightarrow{i_{\text{л}}} = \overrightarrow{i_z}$, т.е. оно совпадает с направлением фазовой скорости $\overrightarrow{v_{\text{ф}}}$.

Введем ***волновой вектор*** $\vec{k}$:

$$\vec{k} = \overrightarrow{i_{\text{л}}}\tilde{k} = \overrightarrow{i_{\text{л}}}(k_\beta - ik_\alpha), \qquad (4)$$

совпадающий с направлением луча и равный по величине коэффициенту распространения волны в данной среде. В соотношении (4) $k_\beta$ - коэффициент фазы; $k_\alpha$ - коэффициент затухания.

В диэлектрических средах без потерь $\mu = 1$ и $\sigma = 0$. С учетом этого решение волнового уравнения, описывающего распространение плоской электромагнитной волны в диэлектрике без потерь имеет вид:

$$\dot{H}_y(z) = \dot{H}_y(0) \cdot \exp[-ikz]. \qquad (5)$$

а волновое число, входящее в данное соотношение, может быть переписано в виде:

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = k_0\sqrt{\varepsilon\mu} = k_0\sqrt{\varepsilon}, \qquad (6)$$

где $k_0 = 2\pi / \lambda_0$ волновое число в вакууме.

Следовательно, в диэлектрике без потерь длина волны и фазовая скорость уменьшаются в $\sqrt{\varepsilon}$ раз по сравнению с аналогичными параметрами для вакуума.

Соотношение между поперечными компонентами $E_x$ и $H_y$ в плоской волне имеет вид

$$E_x(z) = -\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_a \cdot \mu_a}}{\omega\varepsilon_a}\dot{H}_y(z) = \sqrt{\mu_a / \varepsilon_a} \cdot \dot{H}_y(z). \qquad (7)$$

Величина $\sqrt{\mu_a / \varepsilon_a}$ имеет размерность сопротивления и называется ***волновым (характеристическим) сопротивлением среды***. Оно характеризует отношение ортогональных составляющих напряжённостей электрического и магнитного поля. Для идеального диэлектрика волновое сопротивление среды чисто вещественно и определяется соотношением:

$$W = Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \ \text{[Ом]}. \qquad (8)$$

Вещественный характер $Z_c$ означает, что вектора $\overline{E}$ и $\overline{H}$ имеют одинаковую фазу. Вектор Пойнтинга, характеризующий направление распространения волны и величину плотности потока мощности, является вещественным

$$\overline{\Pi} = 0.5 \cdot \left[\overline{i_x} \cdot \dot{E}_x, \overline{i_y} \cdot \dot{H}_y^{\,*}\right] = \overline{i_z} \frac{E_x^2}{Z_c}. \qquad (9)$$

Здесь $E_x = 0.707 \cdot \left|\dot{E}_x\right|$ - действующее значение.

Таким образом, имеется только активный поток энергии в направлении оси $0z$. Плотность потока энергии не зависит от координат и от частоты. Скорость распространения энергии равна фазовой скорости.

## 2 Плоские волны в средах с потерями. Дисперсия электромагнитных волн

Для реальных сред воздействие электромагнитного поля вызывает два вида потерь в среде. ***Потери первого вида*** обусловлены ***проводимостью*** материала. Данные потери характерны для металлов и хороших проводников, а также для диэлектриков на низких частотах и в стационарных полях. ***Потери второго вида*** представляют собой ***поляризационные*** (диэлектрические или магнитные) потери, объясняемые трением при смещении заряженных частиц вещества в переменном электрическом поле или в магнитных материалах при перемагничивании. В результате наблюдается явление линейного диэлектрического (соответственно магнитного) гистерезиса, отставание по фазе векторов электрического $\vec{D}$ (соответственно магнитного $\vec{B}$) смещения от вектора напряженности электрического $\vec{E}$ (магнитного $\vec{H}$) поля. Отставанию по фазе соответствует комплексная (диэлектрическая или магнитная) проницаемость с отрицательной мнимой частью в материальных уравнениях. Данные проницаемости, напомним, могут быть представлены в виде:

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon'_a - i\varepsilon''_a = \varepsilon'_a (1 - i \operatorname{tg}\delta^{э}), \; \tilde{\mu}_a = \mu'_a - i\mu''_a = \mu'_a (1 - i \operatorname{tg}\delta^{м}), \qquad (10)$$

в которых $\operatorname{tg}\delta^{э} = \dfrac{\varepsilon''_a}{\varepsilon'_a}$, $\operatorname{tg}\delta^{м} = \dfrac{\mu''_a}{\mu'_a}$ - соответственно тангенс угла диэлектрических и магнитных потерь.

Рассмотрим более подробно потери, обусловленные проводимостью среды. В этом случае волновое число в диэлектрике с потерями будет комплексной величиной:

$$\tilde{k} = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_\alpha \mu_\alpha} = k_0 \cdot \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = k_0 \cdot \sqrt{\varepsilon - i60\lambda_0\sigma}\,. \qquad (11)$$

Представляя комплексный коэффициент распространения (11) через коэффициенты затухания и фазы, решение уравнения Максвелла принимает вид

$$\dot{H}(z) = \dot{H}_y(0) \cdot \exp[-\alpha z]\exp[-i\gamma z]. \qquad (12)$$

Первый экспоненциальный сомножитель описывает поглощение энергии в среде за счет электрических и магнитных потерь, т.е. затухание волны. Второй экспоненциальный сомножитель указывает на волновой характер поля, на его движение.

Для реальных диэлектриков, у которых магнитные потери отсутствуют, а тангенс угла диэлектрических потерь хотя и мал, но имеет конечную величину, выражения для составляющих комплексного коэффициента распространения могут быть записаны в виде:

$$k_\beta = k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\,, \quad k_\alpha = \frac{k}{2}\operatorname{tg}\delta = \frac{\omega}{2}\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}\operatorname{tg}\delta\,. \tag{13}$$

Фазовая скорость в диэлектрике определяется формулой:

$$v_{\text{ф}} = \lambda\cdot f = \frac{\omega}{k_\beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,. \tag{14}$$

Конечная величина тангенса диэлектрических потерь обуславливает сдвиг фаз между векторами $\vec{E}$ и $\vec{H}$, и, соответственно комплексный характер как волнового сопротивления

$$W = Z_c = \frac{\dot{E}}{\dot{H}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a(1 - i\operatorname{tg}\delta)}} \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}\exp(i\frac{\delta}{2})\,, \tag{15}$$

так и вектора Пойнтинга

$$\vec{\Pi} = \bar{i}_z\frac{E_x^2}{2|Z_c|}\exp(-2\alpha z)\exp\left(i\frac{\delta}{2}\right). \tag{16}$$

Появление реактивной составляющей описывает тепловые потери в среде. Средняя плотность потока энергии, описываемая соотношением

$$\vec{\Pi}_{\text{ср}} = \operatorname{Re}(\vec{\Pi}) = \bar{i}_z\frac{E_x^2}{2|Z_c|}\exp(-2\alpha z)\cos\left(\frac{\delta}{2}\right), \tag{18}$$

экспоненциально убывает вдоль оси $0z$ со скоростью

$$\vec{v}_{\text{э}} = \frac{\operatorname{Re}(\vec{\Pi})}{w_{\text{ср}}}\,, \tag{19}$$

где $w_{\text{ср}}$ - средняя объемная плотность энергии. Модуль волнового сопротивления $|Z_c|$ описывается выражением

$$|Z_c| = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}} = W_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,. \tag{20}$$

Из изложенного выше следует, что свойства плоской волны, распространяющейся в среде с проводимостью и без потерь, различны. Основное отличие состоит в том, что в среде без потерь параметры плоской волны одинаковы при любых частотах, а в среде с конечной проводимостью они зависят от частоты. Зависимость свойств волны от частоты называется ***дисперсией***, а соответствующие ***среды*** – ***диспергирующими***.

Для хороших проводников $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - i\sigma/\omega \approx -i\sigma/\omega$ и магнитные потери отсутствуют, т.е. $\tilde{\mu}_a = \mu_a$. Коэффициент распространения волны будет определяться соотношением

$$\tilde{k} = i\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \tilde{\mu}_a} = i\omega\sqrt{-i\frac{\sigma}{\omega}\mu_a} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu_a\sigma}\,. \qquad (21)$$

Введем величину

$$d_0 = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_a\omega}} \qquad (22)$$

и назовем ее ***толщиной скин-слоя*** (глубиной поверхностного проникновения, толщиной поверхностного слоя).

Коэффициент распространения и его составляющие, а также выражение для фазовой скорости с учетом формулы (22) могут быть записаны в виде

$$\tilde{k} = \frac{1+i}{d_0}, \quad k_\alpha = \frac{1}{d_0}, \quad k_\beta = \frac{1}{d_0}, \quad v_{\text{ф}} = \omega d_0. \qquad (23)$$

С учетом

### 3 Особенности проведения вычислений в средах с потерями

Анализ приведенных соотношений с точки зрения организации вычислительного процесса показывает, что наибольшую сложность представляет нахождение без использования вычислительной техники комплексного волнового числа в средах с потерями, описываемого в зависимости от исходных данных либо соотношением (11), либо

$$\tilde{k} = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta^{\text{э}}}\,. \qquad (24)$$

Для выделения мнимой составляющей используется известный прием разложения выражения $\sqrt{1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta^{\text{э}}}$ в ряд по малому аргументу $\mathrm{tg}\,\delta^{\text{э}}$. Этот прием становится возможным, поскольку в радиотехнике применяются материалы с малыми ($\mathrm{tg}\,\delta^{\text{э}} << 1$) значениями тангенса угла диэлектрических потерь. В результате получаем выражение, в котором легко выделяют действительная и мнимая составляющие:

$$\tilde{k} = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 - i\frac{\mathrm{tg}\,\delta^{\text{э}}}{2} + \frac{\mathrm{tg}^2\,\delta^{\text{э}}}{8}\right). \qquad (25)$$

Еще одной математической сложностью является нахождение характеристического сопротивления для сред с потерями, определяемого соотношением:

$$W_c = \sqrt{\frac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta^{\text{э}}}}\,. \qquad (26)$$

Анализ выражения (26) показывает, что сложность вызовет вычисление второго сомножителя вследствие нахождения в знаменателе выражения $\sqrt{1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta^{\text{э}}}$ .

Характеристическое сопротивление среды определятся с использованием формулы:

$$W_c = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\varepsilon_0 \varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - i \operatorname{tg} \delta^{э}}} = \frac{W_0}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt[4]{1 + (\operatorname{tg} \delta^{э})^2}} \exp(i \frac{\operatorname{tg} \delta^{э}}{2}).$$

## Описание порядка работы

С учетом приведенных теоретических положений

- для языковой среде MathCad 15 разработать программу вычисления задачи с условием:

Плоская электромагнитная волна с частотой $f = 10^9$ Гц распространяется в среде с параметрами $\varepsilon = 2.4$, $\operatorname{tg} \delta^{э} = 10^{-1}$, $\mu = 1$. Определить фазовую скорость, длину волны, коэффициент ослабления и характеристическое сопротивление среды.

- оценить корректность разработанной программы путем ее решения без использования средств вычислительной техники;
- составить блок-схему решения задачи.

## Содержание отчета

1. Название работы, цель исследований.
2. Блок-схема разработанной программы.
3. Текст программы.
4. Решение, полученное без использования средств вычислительной техники.

## Контрольные вопросы

1) Как классифицируются среды по соотношению омических и диэлектрических потерь?
2) Какая волна называется плоской?
3) Какими характеристиками описываются волны?
4) Как изменяется фазовая скорость и длина волны в идеальном диэлектрике?
5) Чем отличаются характеристики электромагнитной волны в среде с потерями?
6) Что такое скин-слой?
7) Чем обусловлены омические потери в диэлектрике?
8) Как вычисляется тангенс угла диэлектрических потерь?
9) Как зависят свойства плоской волны от частоты в средах без потерь и с потерями?

10) Сколько составляющих имеет вектор Пойнтинга в реальной среде (среде с потерями)? Чем обусловлено появление реактивной составляющей вектора Пойнтинга?

## Список литературы


1. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Горячая линия – Телеком, 2004.
2. Звездина М.Ю., Шокова Ю.А. Электромагнитные поля и волны: курс лекций. Ростов н/Д: 2016: [Электронный ресурс]: http://de.donstu.ru/CDOCourses/30c97dab-1bbe-437e-8794-e74ffdfc1521/2939/2742.pdf
3. Электромагнитные поля и волны / М.Ю. Звездина, Ю.А. Шокова [и др.]. Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2018. – 298 с.