

# Лекции по дисциплине «Электродинамическое моделирование»

---

Для магистрантов направления  
11.04.02 - Инфокоммуникационные технологии и  
системы связи

Ростов-на-Дону-

01.01.2020

Лекции предназначены для предварительной теоретической подготовки к проведению практических и лабораторных работ по дисциплине «Электродинамическое моделирование» по направлению подготовки 11.04.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи программы «Беспроводные инфокоммуникационные сети».

## СОДЕРЖАНИЕ

Лекция 1	Основы экспериментальных исследований в антенной технике	2
	1.1 Экспериментальные исследования как составная часть проектирования антенной техники	2
	1.2 Описание метода вышки при проведении натурного эксперимента по изучению характеристики направленности антенны	4
	1.3 Особенности проведения вычислительного эксперимента на примере решения задачи дифракции	6
	1.4 основные положения метода разделения переменных при решении дифракционных задач	11
Лекция 2	Применение численных методов в вычислительном эксперименте при проектировании антенн	13
	2.1 Общие сведения о численных методах	13
	2.2 Интегральные уравнения внешних задач электродинамики	22
Лекция 3	Особенности электродинамического моделирования антенн при использовании метаматериалов	26
	3.1 Анализ возможностей управления характеристиками антенн с помощью электрических свойств покрытия	26
	3.2 Взаимосвязь между конструктивными параметрами высокоимпедансного покрытия и величиной коэффициента отражения	29
	3.3 Физические основы управления полем отражения от высокоимпедансной поверхности	33
	3.4 Примеры использования метаматериалов в антенной технике	38

## Лекция 1. Основы экспериментальных исследований в антенной технике

### 1.1 Экспериментальные исследования как составная часть проектирования антенной техники

Наиболее важной составной частью научных исследований, в том числе и в области разработки антенн, являются эксперименты. В основе данного типа исследований лежит *эксперимент*, т.е. научно поставленный опыт или наблюдение явления в точно учитываемых условиях, позволяющих следить за его ходом, управлять им, воссоздавать его каждый раз при повторении этих условий. Основной целью эксперимента является проверка теоретических положений (подтверждение рабочей гипотезы), а также более широкое и глубокое изучение темы научного исследования.

При проектировании антенны особое внимание уделяется её характеристике направленности. Именно данная характеристика определяет основное свойство антенны – излучать электромагнитную энергию в пространство (или принимать её из него).

При проектировании исследование характеристик направленности осуществляется двумя методами: методом натурного эксперимента и методом вычислительного эксперимента. *Натурный эксперимент* связан с проведением измерений на полигоне (внешнем или внутреннем) и предназначен для проведения исследований готовых конструкций антенн или их макетов, т.е. исследователь имеет дело только с реальным объектом исследования – антенной. Метод *вычислительного эксперимента*, наоборот, связан с теоретическими исследованиями и базируется на построении электродинамической модели, разработке соответствующего вычислительного алгоритма и его реализации в среде программирования. В результате исследователь имеет дело не только с реальным объектом, но и с его имитационной моделью и вычислительной техникой. Вычислительный эксперимент всегда представля-

ет собой имитацию некоторой реальности. В результате вычислительного эксперимента исследователь может получить новые знания, изучить и оценить новые, еще не созданные конструкции.

Оба метода проведения эксперимента по исследованию характеристики направленности антенны имеют как достоинства, так и недостатки. Так, метод натурного эксперимента обеспечивает получение характеристики направленности готовых конструкций антенн без проведения предварительных теоретических исследований, однако требует наличия внешнего или внутреннего полигона и дорогостоящего откалиброванного оборудования. При проведении вычислительного эксперимента исследователь должен предварительно решить несколько проблемных вопросов:

- проблема выбора (построения) модели: модель должна обеспечивать получение результатов с требуемой для практических целей точностью при сопоставимых вычислительных затратах;

- проблема адекватности модели описываемой реальности.

Данные вопросы решаются на этапе разработки методологии эксперимента. Методология эксперимента – это общая структура (проект) эксперимента, т. е. постановка и последовательность выполнения экспериментальных исследований. Методология эксперимента включает в себя следующие основные этапы:

- проведение натурного эксперимента;
- построение математической модели;
- выбор и применение численного метода для нахождения решения;
- обработка результатов вычислений;
- сравнение с результатами натурного эксперимента;
- принятие решения о продолжении натуральных экспериментов;
- продолжение натурного эксперимента для получения данных, необходимых для уточнения модели;
- накопление экспериментальных данных;

- построение математической модели;
- автоматическое построение программной реализации математической модели;
- автоматизированное нахождение численного решения;
- автоматизированное преобразование результатов вычислительных в форму, удобную для анализа;
- принятие решения о продолжении натурных экспериментов.

Следует отметить, что приведенное количество этапов справедливо для традиционного эксперимента. Однако в последнее время широко применяют математическую теорию эксперимента, позволяющую резко повысить точность и уменьшить объем экспериментальных исследований.

Анализ приведенных выше этапов показывает, что вычислительный и натуральный эксперимент связаны между собой и дополняют друг друга.

## **1.2 Описание метода вышки при проведении натурального эксперимента по изучению характеристики направленности антенны**

Анализ приведенных выше этапов научных исследований показывает, что основой для получения новых знаний об объекте, а также базой для оценки достоверности получаемых при проведении вычислительного эксперимента результатов является результаты натурального эксперимента.

Рассмотрим особенности проведения натурального эксперимента на примере изучения характеристики направленности антенны сухопутной подвижной связи.

Методы измерения характеристики направленности антенн подразделяются на группы в соответствии с зоной (дальней, промежуточной, ближней) проведения измерений. Наиболее отработанными и простыми являются методы измерения в дальней зоне. Граница дальней зоны определяется соотношением размеров антенны и длины волны:

$$r > 2L^2 / \lambda, \quad (1)$$

где  $L$  – наибольший из линейных размеров испытуемой антенны (размер апертуры);  $r$  – расстояние от фазового центра антенны;  $\lambda = c / f$  – длина волны;  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с – скорость света в свободном пространстве;  $f$  – частота передатчика.

К методам измерений в дальней зоне относятся методы вышки и метод облета. Оба метода применяются в широком диапазоне геометрических и электрических размеров антенн и могут применяться на обоих типах полигонов (открытых и закрытых полигонах, т.е. безэховых камерах). Метод вышки наиболее обеспечен в аппаратном отношении, поскольку предполагает использование приборов широкого применения либо штатные средства радиотехнических комплексов при контроле параметров их антенн и каналов в целом.

Данный метод базируется на использовании поля излучения вспомогательной антенны, расположенной на поворотных устройствах в дальней зоне. На рисунке 1 показан вариант построения поднятого полигона, который может использоваться в методе вышки. На нем  $f_1(\theta)$  и  $f_2(\theta)$  обозначены соответственно ДН испытуемой и вспомогательной антенн.

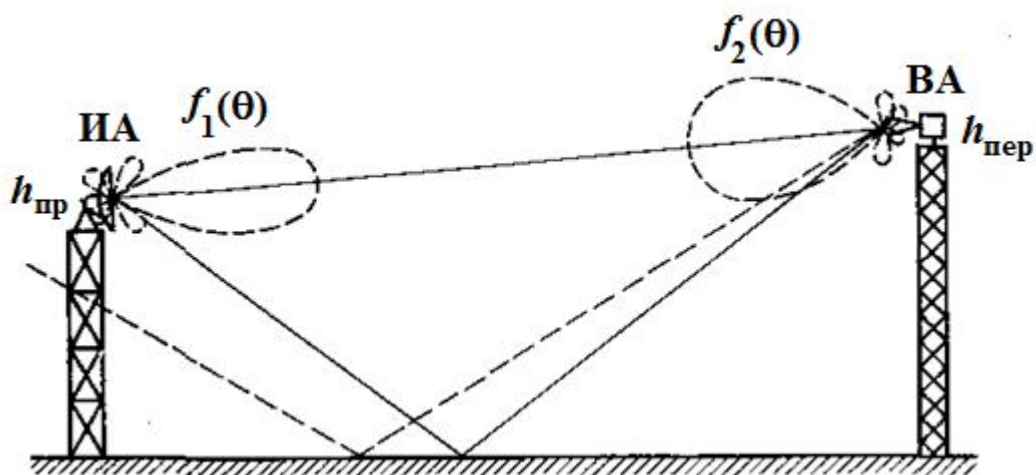


Рисунок 1 – Схема поднятого полигона, используемого в методе вышки

Основными недостатками метода являются:

- возможность возникновения погрешностей измерений вследствие ветровых воздействий, тепловых деформаций, отклонений измеряемой антенны;
- трудности с обеспечением электромагнитной совместимости измерений с работой других средств.

### 1.3 Особенности проведения вычислительного эксперимента на примере решения задачи дифракции

При использовании вычислительных экспериментов краевая задача электродинамики **решается** одним из известных методов. Данные методы различаются: одни из них обладают достаточно большой общностью, другие разработаны к решению конкретных задач. Однако во всех случаях решение начинается с постановки задачи, а затем построения модели ее решения.

Постановка дифракционных (краевых) задач выглядит следующим образом. **Пусть** имеется тело, геометрия поверхности  $S$  которого описывается какой-то функцией  $\mathfrak{R}$ . На данное тело падает электромагнитная волна ( $\vec{E}^{\text{пад}}$ ,  $\vec{H}^{\text{пад}}$ ), возбуждаемая источником заданного вида. **Требуется** найти полное поле в произвольной точке. В качестве **ограничений** на получаемое решение используются граничные условия на поверхности тела. Геометрия задачи показана на рисунке 2.

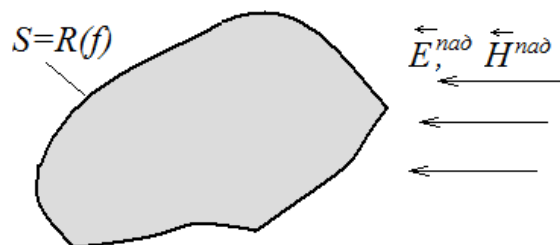


Рисунок 2 – Геометрия задачи дифракции

Следует отметить, что в формулировки любой задачи математической физики применяются ключевые слова, вытекающие из формулировки теоремы единственности. К ним относятся: «пусть», «ограничения», «требуется».

Условно методы решения задач электродинамики разделяются на три группы: строгие; приближенные (асимптотические); численные.

**Строгие методы** позволяют получать решение в аналитической (замкнутой) форме. При этом решение справедливо при любом соотношении между размерами рассматриваемого объекта и длиной волны, т.е. при любых электрических размерах объекта. Полученное решение удовлетворяет всем требованиям теоремы единственности. Точность получаемых при этом результатов зависит от адекватности модели реальному объекту, т.е. от количества введенных допущений на этапе формализации задачи.

Следует отметить, что *одну и ту же краевую задачу можно решить различными строгими методами, получая различные формы записи решения. В некоторых случаях оба решения не могут быть сведены к одной и той же записи, доказав их идентичность. Однако оба решения удовлетворяют требованиям теоремы единственности и можно полагать, что полученные решения совпадают.*

При построении строгого решения электродинамической задачи её предварительно сводят либо к решению дифференциального уравнения в частных производных (например, как представление уравнений Максвелла в дифференциальной форме), либо к решению интегрального уравнения. Решение осуществляется в той системе координат, в которой координатные поверхности совпадали или были близки к граничным поверхностям. Данные поверхности получили название **канонических**. При указанных условиях возможно разделение компонент электрического и магнитного полей. Примерами канонических поверхностей являются, в частности, круговой, эллиптический, параболический цилиндры, бесконечный клин, шар. Полученные для канонических поверхностей решения могут играть роль эталонных реше-



ний, поскольку с их помощью можно проверять точность приближенных решений.

Известно относительно небольшое число строгих методов решения краевых задач электродинамики, например: метод Фурье (метод разделения переменных); метод Гринберга; метод интегральных преобразований; метод Винера-Хопфа-Фока; метод разветвленных решений; метод, основанный на построении функций Грина.

Бурное развитие вычислительной техники позволило создать эффективные **методы численного решения** задач электродинамики. Однако ряд программных продуктов, например, *CST Studio Suite 2018* и *GRASP* фирмы *Ticra* предлагают для моделирования несколько методов. В связи с этим возникает необходимость знать, чем предлагаемые методы отличаются друг от друга и какой метод для исследований в каждом конкретном случае выбрать.

В основе численных методов лежит не формула, а алгоритм, т.е. последовательность операций, в результате которых из ряда чисел, характеризующих исходные данные задачи, получается решение также в виде ряда чисел. При решении линейных задач, каковыми является подавляющее большинство задач электродинамики, численное решение, как правило, заключается в сведении ее к системе линейных алгебраических уравнений с последующим решением последней. Класс численных методов, сводящих граничную задачу математической физики к решению системы линейных алгебраических уравнений, носит название **прямых методов**.

Подходы к **приближенному решению** задач электродинамики условно подразделяются на две группы: методы построения асимптотических решений (**асимптотические методы**) и методы, основанные на некоторых эвристических предположениях (**эвристические методы**). Эвристические методы применяются, как правило, для решения внешних задач электродинамики. В асимптотических методах решение ищется в виде разложения по положительным степеням некоторого малого параметра или по обратным степеням

некоторого большого параметра. Обычно в качестве такого параметра выбирается электрический характеристический размер объекта  $ka$  или отношение характерного размера  $L$  тела к длине волны  $\lambda$  -  $L/\lambda$ .

По данному параметру выделяют три характерные области решений:

- квазистатическую (рэлеевскую) область, когда  $L/\lambda \ll 1$ ;
- резонансную область, когда  $L/\lambda \approx 1$ , а параметры среды могут быстро меняться на расстоянии, равном длине волны;
- квазиоптическую область, когда  $L/\lambda \gg 1$ , а параметры среды меняются мало на расстоянии, равно длине волны.

В *квазистатической области* применяются асимптотические методы с представлением разложения векторов поля в ряд по степеням  $kL$ , т.е. по малому параметру задачи. В результате электродинамическая задача сводится к последовательному решению ряда электростатических и магнитостатических задач. Переход к статическим задачам дает упрощение за счет двух факторов: во-первых, скалярные задачи скалярные, а, во-вторых, получаемые при этом уравнения электростатики - уравнения Лапласа и Пуассона – проще уравнений Гельмгольца. Недостатком является тот факт, что в практических задачах далеко не всегда удастся аналитически решить уравнение Лапласа и приходится прибегать к численному решению.

*Резонансная область* наиболее сложна для исследования, поскольку здесь требуются строгие методы решения уравнений Максвелла. Для получения таких решений чаще всего используются два близких строгих метода: метод разделения переменных (метод собственных функций) и метод интегральных преобразований. При использовании данных методов подбирается система координат, такая, чтобы граничные поверхности или поверхности равных параметров среды совпадали с координатными поверхностями. В выбранной системе координат отыскиваются решения однородного уравнения Гельмгольца. Эти решения при определенных условиях образуют полные ор-

тогональные системы функций, по которым решение неоднородного уравнения может быть разложено либо в ряд (метод собственных функций), либо в интеграл (метод интегральных преобразований). Получаемое в аналитической форме полное решение задачи справедливо во всех трех характерных областях. Недостатком методов является то, что они применимы только при очень простой форме граничных поверхностей или поверхностей равных параметров среды.

Граничные задачи можно также свести к интегральным уравнениям. Интегральные уравнения можно составить для тел практически любой формы. Накладываются лишь слабые ограничения, требующие в определенном смысле гладкости поверхности. Интегральные уравнения позволяют рассмотреть вопросы существования решений граничных задач. Вместе с тем, используя хорошо разработанные методы численного решения интегральных уравнений, строятся алгоритмы решения некоторых классов граничных задач (преимущественно внешних).

**Квазиоптика** – наиболее многообещающий и развивающийся в настоящее время раздел электродинамики, поскольку в соответствии с условием разделения данный раздел определяет формулировку задач в высокочастотном диапазоне. Это становится актуальным при переходе к стандарту 5G, в котором предусмотрен переход сетей связи от частотного диапазона 900 МГц до 84 ГГц.

В квазиоптической области при решении дифракционных задач используются *асимптотические* и *эвристические методы*. Среди эвристических методов выделяют лучевые и волновые. К **лучевым методам**, прежде всего, относятся геометрическая оптика и ее уточнения: геометрическая теория дифракции; комплексная геометрическая оптика, позволяющая вычислять поля в области рефракционной тени; метод параболического уравнения. **Волновые методы** включают в себя метод физической оптики (приближение Кирхгофа) с уточнениями, из которых отметим метод краевых волн, позво-

ляющий найти поправки к полю излучения, связанные с наличием изломов на рассеивающих поверхностях; методы, связанные с построением приближенных (квазиоптических) собственных функций. Квазиоптические методы позволяют решать значительно более широкий круг задач, чем точные. Тенденция здесь такова, что квазиоптика все ближе и ближе подходит к резонансной области. Численные методы в квазиоптической области применяются в меньшей степени, хотя к ним и приходится прибегать для решения уравнений геометрической оптики и параболических уравнений.

#### **1.4 Основные положения метода разделения переменных при решении дифракционных задач**

Одним из аналитических методов, позволяющих получить решение в замкнутой форме, является метод разделения переменных. Рассмотрим основные моменты его применения. Данный метод может быть использован, когда координатные поверхности совпадают с граничными поверхностями тела. Решение дифференциального уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

представляется в виде произведения

$$\psi(x, y) = M(x)N(y) \quad (3)$$

или произведения сумм неизвестных функций  $M(x)$ ,  $N(y)$ , каждая из которых зависит только от одной координаты. Подставив выражение (3) в уравнение (2) и почленно разделив на произведение  $M(x)N(y)$ , получаем:

$$\frac{1}{M(x)} \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = -\frac{1}{N(y)} \frac{d^2 N(y)}{dy^2} = K^2. \quad (4)$$

Появление постоянной разделения  $K^2$  обусловлено тем, что левая и правая части уравнения зависят от разных переменных. Уравнение (4) может быть разделено на два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \pm K^2 M(x), \quad \frac{d^2 N(x)}{dx^2} = \mp K^2 N(x). \quad (5)$$

Решение уравнений (5) при верхнем сочетании знаков при выбранной постоянной разделения имеет вид:

$$M(x) = A \cos Kx + B \sin Kx, \quad (6a)$$

$$N(y) = C \operatorname{ch} Ky + D \operatorname{sh} Ky. \quad (6b)$$

При обратном сочетании знаков при постоянной разделения гиперболические и тригонометрические функции меняются местами.

Выбор решения зависит от граничных условий. Поскольку данный метод применяется для решения однородных задач математической физики, то искомая функция должна удовлетворять однородным граничным условиям на концах промежутка изменения одной из переменных. В предположении, что однородные краевые условия выполняются на концах промежутка изменения функции  $(a, b)$ , выражение для данных граничных условий имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \alpha_a \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_a u \right) \Big|_{x=a} = 0, \\ \left( \alpha_b \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_b u \right) \Big|_{x=b} = 0 \end{array} \right., \quad (7)$$

где  $u$  – обобщенное обозначение искомой функции;  $\alpha_a, \alpha_b, \beta_a, \beta_b$  – постоянные, часть из них может равняться нулю. В частности, если  $\alpha_a = \alpha_b = 0$  и  $\beta_a = \beta_b = 1$  из соотношения (7) несложно получить однородные условия первого рода:

$$u \Big|_{x=a} = u \Big|_{x=b} = 0, \quad (8a)$$

а при  $\alpha_a = \alpha_b = 1$  и  $\beta_a = \beta_b = 0$  – однородные граничные условия второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=b} = 0. \quad (8b)$$

В приложениях могут встречаться и условия другого вида:

$$u|_{x=a} = u|_{x=b}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=b}. \quad (1.11в)$$

С учетом сделанных замечаний относительно граничных условий в дальнейшем решении сначала находится та независимая функция, по переменной которой заданы нулевые граничные условия, например,  $M(x)$ . Данная функция будет удовлетворять заданным однородным граничным условиям и не будет равна нулю (что не представляет интереса) только при определенных значениях чисел  $K_n$ . Числа  $K_n$  в общем случае вычисляют, приравняв к нулю главный определитель системы уравнений, полученной путем подстановки решения  $M_n(Kx)$  в выражение для граничных условий (при  $x = a$  и  $x = b$ ). Определитель составляют из коэффициентов при  $A_n$  и  $B_n$ , которые рассматривают как искомые величины. Затем какое-либо значение из найденных чисел  $K_n$  подставляют в эту систему уравнений и находят одну из постоянных, например,  $A$ , выраженную через  $B$ . Однако числа  $K_n$  в ряде случаев могут быть рассчитаны без составления системы уравнений, непосредственно по граничным условиям, с учетом свойств искомого поля. При известных значениях  $K_n$  частное решение имеет вид:

$$\psi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ (A_n \cos K_n x + B_n \sin K_n x) (C_n \operatorname{ch} K_n y + D_n \operatorname{sh} K_n y) \}. \quad (1.12)$$

Постоянные  $C_n, D_n$  определяют из неоднородных граничных условий по переменной  $y$ .

## **Лекция 2. Применение численных методов в вычислительном эксперименте при проектировании антенн**

### **2.1 Общие сведения о численных методах**

В настоящее время разработано большое количество численных методов, предназначенных для решения краевых задач электродинамики, а также

пакетов прикладных программ, их реализующих. Классификация численных методов решения краевых задач электродинамики приведена на рисунке 1.

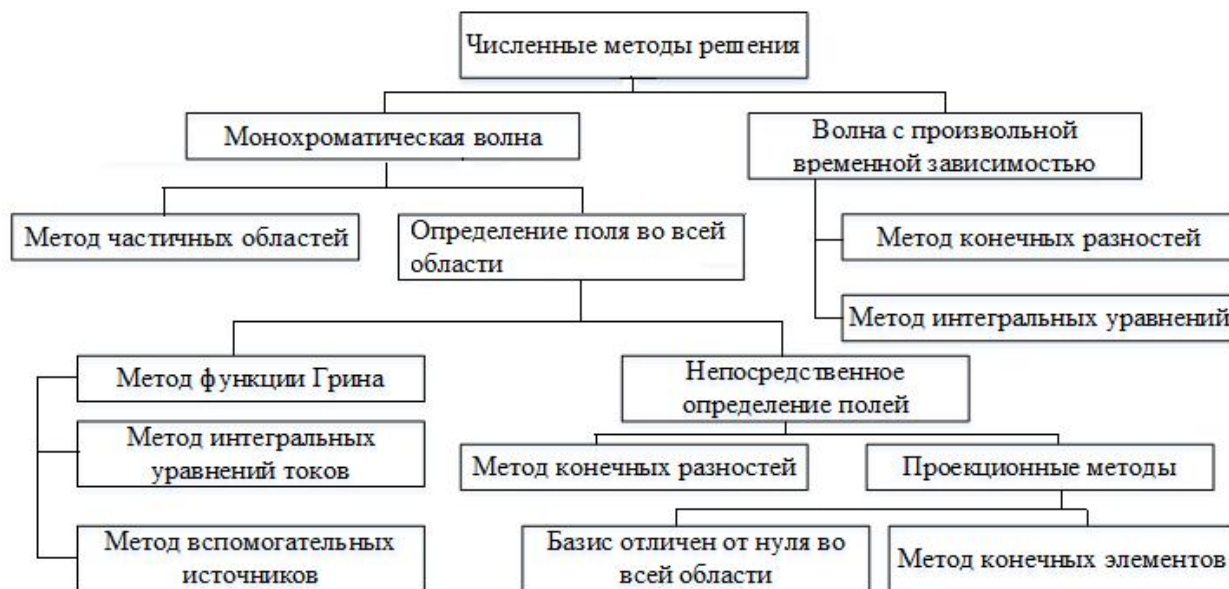


Рисунок 1 - Классификация численных методов решения краевых задач электродинамики [6]

Анализ данного рисунка показывает, что известные методы численного решения краевых задач можно условно разделить на два больших класса, различающихся формой представления временной зависимости электромагнитных полей: методы, предназначенные для случая монохроматических волн и для случая с произвольной временной зависимостью. В первом случае решение проводится в пространственной области, во втором – во временной. При решении задач во временной области обычно применяется либо метод конечных разностей для нестационарных полей, основанный на замене уравнений Максвелла конечноразностными вычислительными схемами, либо метод интегральных уравнений, базирующийся на сведении задачи к интегральным уравнениям с последующим их численным решением.

Методы, предназначенные для решения краевых задач для монохроматических полей, более развиты, поскольку на практике гармонические сигналы широко применяются в системах связи.

В общем случае данные методы можно разбить на две группы: методы, предусматривающие разбиение пространственной области на частичные области и осуществляющие решение в каждой из них, и методы определения поля сразу во всей области. Первые из перечисленных методов получили название метода частичных областей и применяются для решения внутренних задач электродинамики. Основной особенностью решения является отсутствие требования выполнения граничных условий на границах раздела частичных областей. Данные решения находятся с точностью до совокупности некоторых постоянных, которые находятся из условий удовлетворения граничных условий на границах раздела сред (метода сшивания). В зависимости от используемого метода определения данных постоянных, различаются и разновидности такого метода.

Методы второй группы также могут быть подразделены на две подгруппы. В первую подгруппу выделены методы, предполагающие определение самих электромагнитных полей в данной области. Во вторую подгруппы относятся методы, в первую очередь, предполагающие сведение задачи к нахождению распределения некоторой совокупности источников, поле каждого из которых удовлетворяет уравнению Гельмгольца. Распределение таких источников ищется из условия выполнения граничных условий. Источники при этом могут располагаться на некоторой поверхности или контуре. Достоинством такого подхода является уменьшение числа неизвестных, а, следовательно, и сокращение вычислительных затрат.

Если в качестве неизвестной функции при описываемом подходе выбирается распределение плотности токов, задача сводится к **интегральным уравнениям** с особенностями в подынтегральных функциях. В качестве неизвестных можно также использовать **вспомогательные источники**, выбор которых может быть различным. Данные источники могут располагаться в пространстве или по контуру тела непрерывным или дискретным образом.



Основными разновидностями определения непосредственно полей в рассматриваемой области является **метод конечных разностей**, основанный на замене дифференциальных операторов разностными, и **проекционные методы** определения полей. Проекционные методы – это методы нахождения приближенного решения некоторого операторного уравнения в заданном подпространстве, основанные на проектировании уравнения на другое подпространство.

При использовании данных методов задача формулируется в виде функционального (дифференциального или интегрального) оператора  $F$ , область определения которого лежит в пространстве  $X$ , а область значений – в пространстве  $Y$ :

$$F(x) = u. \quad (1)$$

Для решения данного уравнения используем **метод Галеркина** или **метод моментов**. В соответствии с ним выберем две линейно-независимых системы: из  $X$  (координатной системы) вида  $\{\varphi_i\}_1^\infty$ , называемую системой базисных функций, и из  $Y^*$  вида  $\{\psi_i\}_1^\infty$ , называемую системой пробных или тестовых функций. Пространство  $Y^*$  является сопряженным пространству  $Y$ . Следует отметить, что при совпадении базисных и тестовых функции метод называется методом **Бубнова-Галеркина**.

С использованием введенных обозначений приближенное решение уравнения (1) можно записать в виде разложения в ряд по базисным функциям:

$$x_N = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i, \quad (2)$$

где  $a_i$  - неизвестные коэффициенты разложения, определяемые из решения системы уравнений:

$$\left\langle F\left(\sum_{i=1}^N a_i \varphi_i\right), \psi_j \right\rangle = \langle u, \psi_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Если оператора  $F$  из (1) является линейным, что в задачах электродинамики часто встречается, то уравнение (1) упрощается к виду:

$$Lx = u. \quad (4)$$

Неизвестные функции  $u$  в этом случае находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$\sum_{i=1}^N u_i (L\varphi_i, \psi_j) = \langle u, \psi_j \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

С практической точки зрения для нахождения численного решения с использованием проекционного метода требуется:

- вычислить коэффициенты  $(L\varphi_i, \psi_j)$  СЛАУ, т.е. определить соотношения, их описывающие (теоретическая часть);
- решить полученную СЛАУ (численная часть).

Приведенные выше соотношения описывают схему метода моментов. Несложно заметить, что при использовании данного метода возникают несколько проблемных вопросов:

- определение выбора весовых и пробных функций;
- определение верхнего предела суммирования  $N$ ;
- оценка устойчивости получаемого решения, т.е. как сильно изменится решение при небольших изменениях аргументов.

При решении первого вопроса используются два подхода:

- индивидуальный, при котором базисные функции максимально похожи на точное решение;
- универсальный, при котором базисные функции могут использоваться для различных задач.

Достоинство первого подхода: получение наиболее точного решения. Недостаток – поиск для каждой конкретной структуры своих базисных

функций. Поиск является неформализуемым процессом, который сложно превратить в компьютерную программу.

Достоинство второго подхода: универсальность. Недостаток: получаемая аппроксимирующая функция может являться разрывной. В электродинамике данное обстоятельство в ряде случаев является неприемлемым, поскольку разрывные функции могут порождать сингулярные поля, не отвечающие физической реальности.

В обоих случаях на выбор базисной функции большое влияние оказывает априорная информация о свойствах решения. В качестве априорной информации о виде решения используются граничные условия на отрезке существования функции  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned} l_0 u &\equiv \alpha_0 u(a) + \beta_0(a) = \alpha, \\ l_1 u &\equiv \alpha_1 u(a) + \beta_1(a) = \beta, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \alpha, \beta$  - заданные числа, причем  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0, (i=0,1)$ .

Краевые условия в общем случае задают линейную связь между значениями искомого решения и его производной на концах отрезка  $[a, b]$  в отдельности. Рассматривают три варианта краевых условий:

- условие первого рода:  $\alpha_i = 1, \beta_i = 0$ , т.е. на соответствующем конце отрезка задано значение искомого решения;
- условие второго рода:  $\alpha_i = 0, \beta_i = 1$ , т.е. на концах отрезка заданы значения производной решения;
- условие третьего рода (общий случай):  $\alpha_i \neq 0, \beta_i \neq 0$ . Краевые условия считаются однородными, если  $\alpha \equiv \beta \equiv 0$ .

С учетом краевых условий приближенное решение  $u^N$  задачи записывается в виде

$$u^N(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x), \quad (7)$$

где функция  $\varphi_0$  должна удовлетворять граничным условиям, т.е.  $l_0\varphi_0 = \alpha$ ;  $l_1\varphi_0 = \beta$ ; а остальные функции должны удовлетворять однородным граничным условиям, т.е.  $l_0\varphi_k = 0$ ;  $l_1\varphi_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

Для выбора верхней границы суммирования  $N$  на практике применяется понятие **невязки**  $\varepsilon(x)$ , определяемой соотношением

$$\varepsilon(x) = Lu^N - f(x). \quad (8)$$

После выбора базисных функций данное соотношение принимает вид:

$$\varepsilon = (L\varphi_k - f). \quad (9)$$

Различие разновидностей метода моментов заключается в выборе пробных функций и условий, накладываемых на величину невязки при получении системы линейных алгебраических уравнений:

- метод Бубнова-Галеркина (или просто метод Галеркина), вид пробных функций совпадает с видом базисных функций; в качестве дополнительного условия выдвигают требование ортогональности невязки базисным функциям

$$\int_a^b \varepsilon(x; a_1, a_2, \dots, a_N) \varphi_k(x) dx = 0; \quad k=1, 2, \dots, N, \quad (10)$$

- метод наименьших квадратов, когда в качестве дополнительного условия используют требование минимальной величины квадрата невязки

$$\int_a^b \varepsilon^2(x; a_1, a_2, \dots, a_N) dx = 0; \quad (11)$$

- метод коллокаций, в котором в качестве пробных функций используются дельта-функции, что приводит к тому, что в ряде фиксированных точек из интервала  $[a, b]$  невязка приравняется нулю (выполнение граничных условий в ряде дискретных точек на некоторой поверхности):

$$\varepsilon(x_k, a_1, a_2, \dots, a_N) = 0. \quad (12)$$

Таким образом, метод коллокации является аналитическим приближенным методом решения краевой задачи, при котором решение разыскивается в виде линейной комбинации из линейно независимых функций вида, которая удовлетворяет граничным условиям.

Оценка качества метода, выполненная путем вычисления среднеквадратичного отклонения на отрезке решения, полученного методом коллокации, от точного решения, показала:

- качество приближенного решения повышается при увеличении количества точек коллокации;
- для быстро осциллирующих решений погрешность решения зависит не только от количества точек коллокации, но и от способа их выбора. Меньшая погрешность получается, если точки коллокации попадают на места, соответствующие пучностям колебательного процесса;
- однородность или неоднородность граничных условий практически не влияет на качество решений;
- в точках коллокации приближенные и точные решения различаются, хотя дифференциальное уравнение удовлетворяется в них точно.

Наиболее простыми случаями выбора базисных функции в методе коллокации является применение кусочно-постоянных функций (полиномов нулевого порядка):

$$\varphi_j(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in \Delta_j, \\ 0, & \tau \notin \Delta_j. \end{cases} \quad (13)$$

При гладкой геометрии контура поверхности тела обычно применяется равномерная сетка коллокации с размещением точек в серединах отрезков разбиения. Оптимальный размер отрезков разбиения  $\Delta_j$  составляет величину порядка 0.05...0.1 длины волны.

В результате наложения дополнительных условий соотношение (13) сводится к системе линейных алгебраических уравнений, называемых *проекционной моделью* физической системы.

Как отмечалось ранее, третьим вопросом, возникающим при решении системы линейных алгебраических уравнений, к которым сводится краевая задача, является оценка устойчивости получаемого решения (как сильно изменится решение при небольших изменениях аргументов). Данное понятие не столько связано с выбором численного решения СЛАУ, сколько с формой представления решения.

Поскольку заранее часто бывает невозможно сказать, насколько решение устойчиво к небольшим изменениям исходных данных, то для этих целей используется понятие матричной алгебры, называемое *обусловленностью матрицы*. Под число обусловленности

$$\gamma = \text{cond}(A)$$

понимается величина, характеризующая максимально возможное увеличение ошибки решения по сравнению с ошибкой задания правой части. Кроме того, он таким же образом связывает решение с изменениями в коэффициентах СЛАУ и с погрешностями вычислительного процесса. Минимальное значение числа обусловленности равно 1 и соответствует единичной матрице. При решении краевых задач электродинамики обычно полагают, что число обусловленности должно быть меньше 80. При превышении данной величины необходимо принимать меры по его снижению за счет проведения теоретических преобразований.

Следует отметить также, что получаемое с использованием проекционных методов решение находится с определенной ошибкой. Для оценки данной погрешности используются вектор ошибки и вектор невязки.

Под *вектором ошибки*  $\vec{e}$  понимается разность точного и вычисленного  $\vec{u}^*$  векторов решений:

$$\vec{e} = \vec{u} - \vec{u}^*. \quad (14)$$

Под вектором невязки  $\vec{r}$  понимается вектор несоответствия между правыми и левыми частями уравнения (4) после подстановки в данное уравнение найденного решения:

$$\vec{r} = \vec{f} - A\vec{u}. \quad (15)$$

Между вектором невязки и вектором ошибки существует связь:

$$\vec{r} = A\vec{e}. \quad (16)$$

Используемые на практике методы численного решения СЛАУ дают обычно малую невязку, однако это не обязательно означает, что вектор ошибки также будет мал.

## 2.2 Интегральные уравнения внешних задач электродинамики

Интегральные уравнения – это функциональные уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла. Интегральное уравнение называется линейным, если неизвестная функция входит в него линейно. При решении краевых задач электродинамики наиболее часто применяются так называемые интегральные уравнения Фредгольма, имеющие вид:

$$\int_a^b f(\tau)K(t, \tau)d\tau = u(t) \quad (17a)$$

и

$$f(t) + \lambda \int_a^b f(\tau)K(t, \tau)d\tau = u(t). \quad (17b)$$

Первое уравнение называется интегральным уравнением 1-го рода, а второе - 2-го рода.

**Суть метода интегральных уравнений** заключается в следующем:

1) Исследование поля в неоднородной среде сводят к расчету его в однородной среде.

2) Влияние на поле неоднородностей (диэлектрических, проводящих и магнитных тел) учитывают введением в поле вторичных источников – зарядов поляризаций, токов намагниченности наведенных вихревых токов и др., распределенных на границах (в объеме) неоднородностей.

3) Первоначально определяют интегральные уравнения, которые должны соответствовать распределению вторичных источников, а затем по уравнениям поля с учетом заданных и вторичных источников решают задачу анализа поля.

4) Численное решение интегрального уравнения ЭВМ.

Более подробно составление интегрального уравнения рассмотрим на примере дифракции электромагнитной волны на идеально проводящем теле сложной формы. Уравнение будем составлять исходя из следующих соображений. Предположим, что известно распределение плотности тока  $\vec{j}^{э(м).ст.}$ , возбуждаемого сторонним источником на поверхности тела. В этом случае можно вычислить векторный электродинамический потенциал

$$\vec{A}^{э(м)}(p) = \int_V \vec{j}^{э(м).ст.}(q) G(p, q) dv_q. \quad (18)$$

На основании данного потенциала с учетом соотношений, связывающих векторные электродинамические с векторами электрического и магнитного полей, можно найти токи. Добавляя к полученному полю первичное поле и применяя граничные условия на поверхности тел, получаем интегральное уравнение относительно плотности тока на поверхности тела.

В зависимости от примененного граничного условия получаются интегральные уравнения различного написания и с различными свойствами.

Естественными граничными условиями для идеального проводника является равенство нулю поля внутри него. Найдем, например, поле  $\vec{H}$  с помощью соотношения (18) и представления второго уравнения Максвелла через электродинамические потенциалы в виде



$$\vec{H} = -i\omega\varepsilon_a \vec{A}^M + \frac{1}{i\omega\mu_a} \text{grad div } \vec{A}^M + \text{rot } \vec{A}^\Sigma. \quad (19)$$

В результате получим:

$$\vec{H}(p) = \vec{H}^{\text{перв}}(p) + \int_{\Sigma} \text{rot}(\vec{j}^\Sigma G) d\sigma = \vec{H}^{\text{перв}}(p) - \int_{\Sigma} [\vec{j}^\Sigma(q), \text{grad } G] d\sigma. \quad (20)$$

Приравняем его внутри тел (исключая границу). Тогда получим интегральное уравнение:

$$\int_{\Sigma} [\vec{j}^\Sigma(q), \text{grad } G] d\tau_q = \vec{H}^{\text{перв}}(p), \quad (21)$$

в котором точка интегрирования  $q$  пробегает поверхность  $\Sigma$ , а точка наблюдения  $p$  – область  $V$  – внутри тела, как показано на рисунке 2.

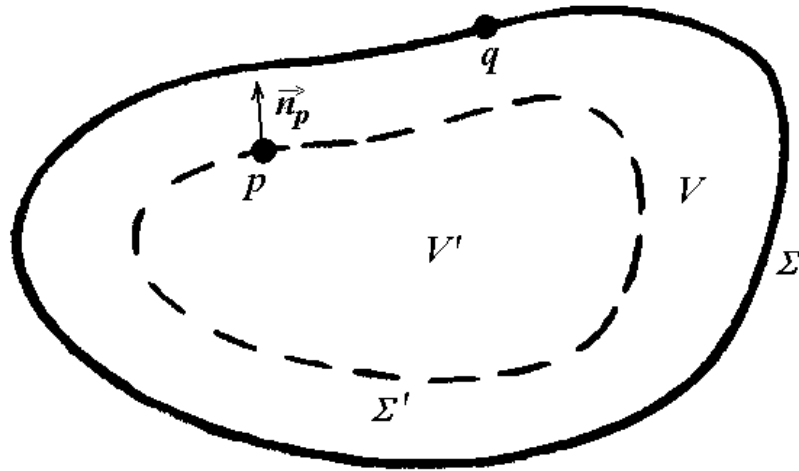


Рисунок 2 – Геометрия контура тела

Такое интегральное уравнение неудобно как для аналитических исследований, так и для создания численных методов, поскольку точки интегрирования и наблюдения имеют существенно различные области изменения. Это сильно затрудняет анализ и не позволяет применить прекрасно разработанную общую теорию интегральных уравнений.

Однако совершенно необязательно приравнять поле нулю во всей области  $V$ . Достаточно приравнять поле в некоторой части  $V'$  объема  $V$ . Известно, что решение однородного волнового уравнения, как и всякого

эллиптического дифференциального уравнения, функция аналитическая, т.е. вблизи любой точки области может быть разложена в ряд Тейлора с ненулевым радиусом сходимости. Поле  $\vec{H}$  в области  $V$  удовлетворяет однородному уравнению и, следовательно, если его приравнять нулю в части объема  $V'$ , то оно будет равно нулю всюду в области аналитичности, т.е. во всем объеме  $V$  вплоть до границы. Можно еще сузить область изменения точки  $p$  и потребовать равенства нулю тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности  $\Sigma'$ , окружающей объем  $V'$ . С помощью теоремы Пойнтинга можно показать, что из равенства нулю тангенциальной составляющей магнитного поля на поверхности  $\Sigma'$  следует равенство нулю поля в объеме  $V'$ , если он не резонансный. Из равенства нулю поля внутри области  $V'$  вновь следует равенство нулю внутри объема  $V$ .

Тангенциальная составляющая вектора  $\vec{H}$  образуется путем умножения его на вектор внешней нормали  $\vec{n}_p$  к поверхности  $\Sigma'$ . Тогда имеем уравнение:

$$\int_{\Sigma} [\vec{n}_p, [\vec{j}'^3(q), \text{grad } G]] d\sigma = [\vec{n}_p, \vec{H}^{\text{перв}}(p)], \quad p \in \Sigma', \quad q \in \Sigma, \quad (22)$$

у которого точки  $p$  и  $q$  пробегают области одинаковой размерности. Поверхность  $\Sigma'$  и поверхность тела  $\Sigma$  могут быть совмещены. При этом совмещении следует учесть, что магнитное поле на электрическом токе, который течет по поверхности тела, имеет разрыв первого рода. Этот разрыв учитывается введением дополнительного слагаемого, и интегральное уравнение приобретает вид:

$$\vec{j}'^3(p) + 2 \int_{\Sigma} [\vec{n}_p, [\vec{j}'^3(q), \text{grad } G]] d\sigma = 2[\vec{n}_p, \vec{H}^{\text{перв}}(p)], \quad p \in \Sigma, \quad q \in \Sigma. \quad (23)$$

Таким образом, ограничение области изменения точки  $p$  упростило интегральное уравнение, однако за счет этого у уравнения появились особые точки, не соответствующие физическому смыслу задачи. На частотах, для

которых область  $V'$  для уравнения (22) или область  $V$  для уравнения (23) резонансны, интегральные уравнения имеют не единственные решения.

Интегральное уравнение (23) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода, хорошо изученным в классической теории интегральных уравнений. Интегральные уравнения типа (22) относятся к интегральным уравнениям Фредгольма первого рода.

### **Лекция 3. Особенности электродинамического моделирования антенн при использовании метаматериалов**

#### **3.1 Анализ возможностей управления характеристиками антенн с помощью электрических свойств покрытий**

Выполним более подробный анализ данного способа управления на примере характеристики направленности и характеристик согласования элементарного электрического вибратора длиной  $\ell$ , расположенного над плоскостью на высоте  $H$ . Геометрия задачи приведена на рисунке 1.

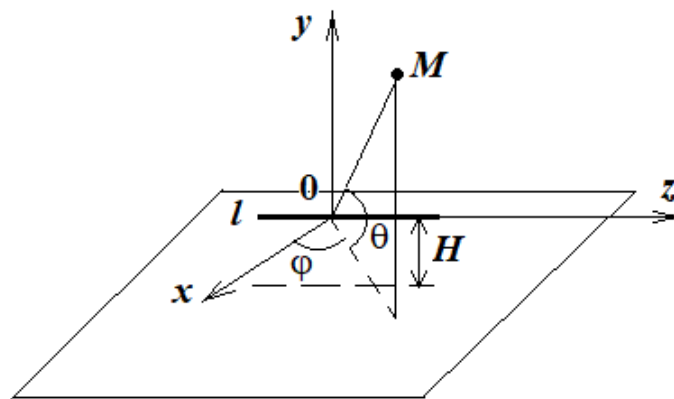


Рисунок 1 – Геометрия задачи

Выбор элементарного вибратора обусловлен тем, что возбуждаемое им поле является наиболее изученным, что подтверждается большим числом публикаций по данной теме.

С учетом известной теории диаграмма направленности элементарных электрических вибраторов определяется соотношениями:

- для горизонтального электрического вибратора:

$$F_{\theta}(\theta, \varphi) = \frac{\cos(k\ell \cos \varphi \cos \theta) - \cos k\ell}{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \theta} \times \\ \times \cos \varphi \sin \theta \sqrt{1 + |R_{\parallel}|^2 + 2|R_{\parallel}| \cos(\Phi_{\parallel} - 2kH \sin \theta)} \exp(iv_{\parallel}), \quad (1)$$

$$F_{\varphi}(\theta, \varphi) = \frac{\cos(k\ell \cos \varphi \cos \theta) - \cos k\ell}{1 - \cos^2 \varphi \cos^2 \theta} \times \\ \times \sin \varphi \sqrt{1 + |R_{\perp}|^2 + 2|R_{\perp}| \cos(\Phi_{\perp} - 2kH \sin \theta)} \exp(iv_{\perp}), \quad (2)$$

- для вертикального электрического вибратора:

$$F_{\theta}(\theta, \varphi) = \frac{\cos(k\ell \sin \theta) - \cos k\ell}{\cos \theta} \sqrt{1 + |R_{\parallel}|^2 + 2|R_{\parallel}| \cos(\Phi_{\parallel} - 2kH \sin \theta)}, \quad (3)$$

где  $v_{\parallel} = \arctg \frac{|R_{\parallel}| \sin(2kH \sin \theta - \Phi_{\parallel})}{1 - |R_{\parallel}| \cos(2kH \sin \theta - \Phi_{\parallel})}, \quad (4)$

$$v_{\perp} = \arctg \frac{|R_{\perp}| \sin(\Phi_{\perp} - 2kH \sin \theta)}{1 - |R_{\perp}| \cos(\Phi_{\perp} - 2kH \sin \theta)}, \quad (5)$$

$k = 2\pi / \lambda$  - волновое число свободного пространства;

$\dot{R}_{\parallel} = |R_{\parallel}| \exp(i\Phi_{\parallel})$ ,  $\dot{R}_{\perp} = |R_{\perp}| \exp(i\Phi_{\perp})$  - комплексные коэффициенты отражения для параллельной и перпендикулярной поляризаций падающей волны;

отсчет углов  $\theta$ ,  $\varphi$  показан на рисунке 1.

Коэффициент усиления антенны  $G$  может быть найден с использованием известного выражения, связывающего между собой коэффициент направленного действия и коэффициент полезного действия  $\eta$  антенны:

$$G = D\eta, \quad (6)$$

где  $\eta = 1 - |\Gamma|^2$ ; (7a)

$$D = \frac{2\pi}{\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (|F_{\theta}(\theta, \varphi)|^2 + |F_{\varphi}(\theta, \varphi)|^2) \sin \theta d\theta d\varphi}, \quad (7b)$$

где  $\Gamma$  - комплексный коэффициент отражения в линии, связывающий излучатель и фидер.

Согласование антенны с фидером рассчитывается исходя из обеспечения минимального значения коэффициента отражения ( $S_{11}$ ) в фидерном тракте с сопротивлением  $z_f$ , вычисляемым по формуле:

$$S_{11} = 20 \lg |\Gamma|. \quad (8)$$

Комплексный коэффициент отражения в линии  $\Gamma$  связан с входным сопротивлением излучателя  $Z_{in}$  и сопротивлением фидера  $z_f$  соотношением:

$$|\Gamma| = \left| \frac{Z_{in} - z_f}{Z_{in} + z_f} \right|. \quad (9)$$

Входное сопротивление вибратора может быть найдено на основе формулы:

$$Z_{in} = Z_{11} + \exp(i\Phi_\zeta) Z_{12}, \quad (10)$$

где  $\zeta = \perp, \parallel$  - поляризация падающей волны, зависящая от ориентации излучателя;

$Z_{11}$ ,  $Z_{12}$  - собственный коэффициент связи и коэффициент взаимной связи основного и зеркального излучателей, определяемые по известным формулам:

$$Z_{11} = \frac{1}{\sin^2(k\ell)} \int_{-\ell}^{\ell} \sin[k(\ell - |z'|)] E_z(\rho = a, z = z') dz', \quad (11)$$

$$Z_{12} = \frac{i30}{\sin(k\ell_1)\sin(k\ell_2)} \int_{-\ell_2}^{\ell_2} \sin[k(\ell_2 - |\xi_2|)] \times \\ \times \left[ \frac{\exp(-ikr_1)}{r_1} + \frac{\exp(-ikr_2)}{r_2} - 2\cos(k\ell_1) \frac{\exp(-ikr)}{r} \right] d\xi_2, \quad (12)$$

$$E_z(\rho = a, z = z') = i30I_0 \left[ \frac{\exp(-ikR_1)}{R_1} + \frac{\exp(-ikR_2)}{R_2} - \right. \\ \left. - 2\cos\left(\frac{k\ell}{2}\right) \frac{\exp(-ikR)}{R} \right], \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{\rho^2 + z^2} ; R_1 = \sqrt{\rho^2 + (z - \ell)^2} ; R_2 = \sqrt{\rho^2 + (z + \ell)^2} , \\
r &= \sqrt{y^2 + (z + \xi_2)^2} ; r_1 = \sqrt{y^2 + (z + \xi_2 - \ell_1)^2} ; \\
r_2 &= \sqrt{y^2 + (z + \xi_2 + \ell_2)^2} , \quad \ell_1 = \ell_2 = \ell ,
\end{aligned} \tag{14}$$

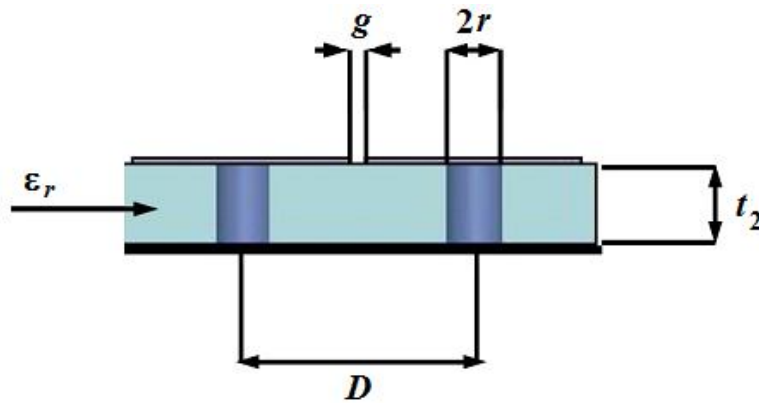
$a$  - радиус вибратора;

$I_0$  - амплитуда тока в пучности.

Анализ соотношений для вычисления характеристики направленности и характеристик согласования показывает, что они непосредственно зависят от поляризации падающей волны и от электрических свойств поверхности, описываемых комплексным коэффициентом отражения. В связи с этим далее рассмотрим, каким образом величина комплексного коэффициента отражения зависит от конструктивных параметров поверхностей из метаматериалов.

### 3.2 Взаимосвязь между конструктивными параметрами высокоимпедансного покрытия и величиной коэффициента отражения

Одним из видов метаматериалов (ММ) являются высокоимпедансные поверхности (HIS). По своим свойствам данные покрытия относятся к частотно-селективным, поскольку обладают собственным резонансом. Геометрия поверхностей данного типа определяется конструкциями, приведенными на рисунке 2.



а

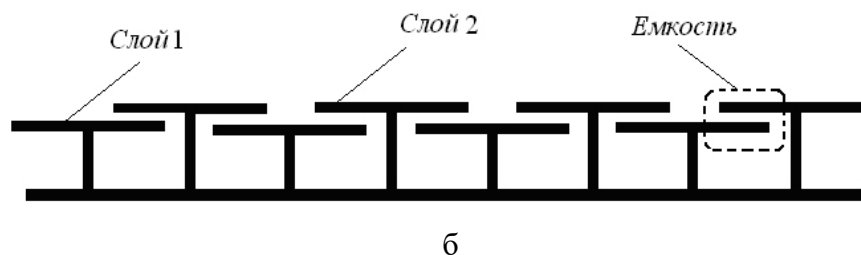


Рисунок 2 – Геометрия конструкции высокоимпедансной поверхности (поверхности Зивенпипера): *а* – однослойное; *б* - двухслойное

Анализ данного рисунка показывает, что покрытие может быть выполнено в виде как однослойного, так и многослойного. В первом случае экран состоит из металлической основы-экрана 1 (см. рисунок 2,*а*), на который на ножках в виде металлического стержня радиуса  $r$  (при грибообразной структуре) или выступа (при выступообразной структуре) 2 установлены с шагом  $D$  пластинчатые металлические элементы, имеющие квадратную или шестиугольную форму.

Зазор между шляпками составляет  $g \ll \lambda$  ( $\lambda$  - рабочая длина волны). Промежуток между экраном-основой и пластинчатыми элементами высотой  $t_2$  заполнен диэлектрическим материалом с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_r$ , выполняющим функции уплотнения конструкции, а также регулирующим структуру электромагнитного поля. Ячейки структуры образуют, как показано на рисунке 3, колебательный  $LC$ -контур. Несложно заметить, что ёмкости образуются в зазорах между пластинами, а индуктивности формируются за счет затекающего в полость магнитного поля.

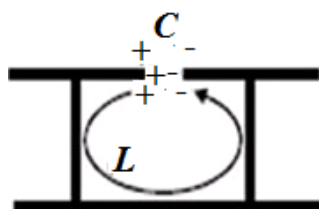


Рисунок 3 - Представление ячейки  $HIS$  в виде  $LC$ -контура

При выполнении покрытия в виде многослойного, например, двух-слойного, показанного на рисунке 2,б, в местах перекрытий пластин возникают дополнительные емкости, отсутствующие в однослойном покрытии. В общем случае число слоев, а, следовательно, дополнительных емкостей, ничем не ограничено.

В зависимости от относительных размеров ячеек (по сравнению с длиной волны в свободном пространстве  $\lambda_0$ ), образующих двумерную периодическую структуру, поверхности подразделяются на два типа. Так, при размерах ячейки порядка  $\lambda_0 / 20 \dots \lambda_0 / 10$  структуры называются электромагнитными структурами с частотной отсечкой (*EBG*), а при меньших размерах (порядка  $\lambda_0 / 40 \dots \lambda_0 / 20$ ) - частотно-селективными (ЧСС, *FSS*). Указанные типы структур функционируют на основе различных физических принципов: *EBG* используют эффект рассеивателя Брэгга, а работа ЧСС связана с особенностями распространения электромагнитной волны в многослойной анизотропной среде с отрицательными относительными проницаемостями в нормальном направлении. Соответственно ЧСС функционируют в частотном диапазоне, более низком, чем частота первого резонанса структуры Брэгга.

Коэффициент отражения для анализируемой высокоимпедансной поверхности будет определяться соотношением:

$$R = \left\{ i\omega t_2 \mu_r \mu_0 - Z_0 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) \right\} \left\{ i\omega t_2 \mu_r \mu_0 + Z_0 \left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) \right\}^{-1}, \quad (15)$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  - резонансная частота *HIS*;

$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$  [Ом] - характеристическое сопротивление *LC*-цепи;

$\mu_r$  - относительная магнитная проницаемость материала заполнения покрытия.



Параметры эквивалентного колебательного контура ячейки высокоимпедансного покрытия зависят от поляризации падающей волны:

$$\begin{Bmatrix} C_{\parallel} \\ C_{\perp} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{TM} \\ C_{TE} \end{Bmatrix} = \varepsilon_{eff} \varepsilon_0 \frac{2D}{\pi} \ln \left( \frac{2D}{\pi g} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ \cos^2 \theta_i \end{Bmatrix}, \quad (16a)$$

$$L_{TM} = L_{TE} = i\omega\mu_0 t_2, \quad (16b)$$

где  $i$  - мнимая единица;

$\omega = 2\pi f$  - циклическая частота излучателя, функционирующего на частоте  $f$ ;

$\varepsilon_0 = (36\pi)^{-1} \cdot 10^{-9}$  [Ф/м] - электрическая постоянная;

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  [Гн/м] - магнитная постоянная;

$\varepsilon_{eff} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}}$  - эффективная проницаемость двух сред (ниже линии пластинок и выше линии пластинок);

$\theta_i$  - угол падения волны.

Остальные параметры, входящие в соотношения (16), показаны на рисунке 2. Если покрытие представляет собой многослойное, то для описания его конструкции применяются еще два параметра:

$$L = \mu_0 \mu t_2, \quad C = \varepsilon_0 \varepsilon S d^{-1}, \quad (17)$$

где  $t_2$  - удаление нижней пластины от металлической подложки;

$S$  - перекрываемая пластинами площадь;

$d = t_1 - t_2$  - расстояние по вертикали между пластинами.

Таким образом, приведенные в данном подразделе соотношения описывают взаимосвязь между конструктивными параметрами покрытия и величиной комплексного коэффициента отражения.

### 3.3 Физические основы управления полем отражения от высокоимпедансной поверхности

Как известно из результатов многочисленных исследований *HIS* относятся к замедляющим структурам. Для них модуль коэффициента отражения  $R$ , описываемый соотношением (15) равен единице, а изменяется только фаза  $\Phi$ . Из теории волн следует, что создаваемое вблизи высокоимпедансного покрытия поле представляет собой поверхностную волну, распространяющуюся вдоль него и экспоненциально затухающую в перпендикулярном к покрытию направлении. Для описания свойств покрытия, на котором возбуждается поверхностная волна, используем импедансный подход, при котором описание электрических свойств покрытия осуществляется с помощью тангенциальных составляющих импеданса, т.е. поверхностного импеданса. Данное упрощение возможно, поскольку при проектировании антенн высокоимпедансные поверхности применяются, в основном, в качестве экранов, для которых информация о структуре электромагнитного поля внутри полостей не используется.

Величина поверхностного импеданса для рассматриваемой структуры определяется соотношением:

$$Z = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC}. \quad (19)$$

График описываемой данным соотношением частотной зависимости величины нормированного к сопротивлению свободного пространства  $\tilde{Z} = Z / W_0$  ( $W_0 = 120\pi$  Ом) поверхностного импеданса приводится на рисунке 4.

Анализ соотношения (19) и рисунка 4 показывает, что на частотах меньших резонансной частоты  $\tilde{\omega} = \omega / \omega_0 = 1$  покрытие обладает поверхностным импедансом индуктивного характера (положительный импеданс), а в

более высокочастотной области – ёмкостного типа (отрицательный импеданс).

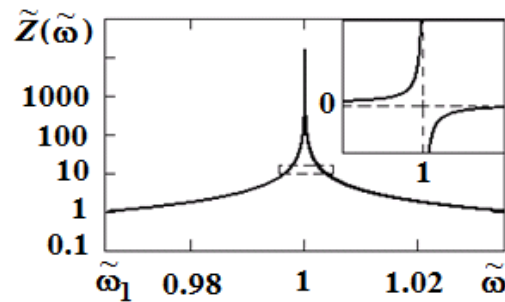


Рисунок 4 - Частотная зависимость нормированной величины поверхностного импеданса вблизи резонансной частоты  $HIS$  покрытия

На индуктивной поверхности возбуждаются поперечно-магнитные волны. На ёмкостной поверхности возбуждаются поперечно-электрические поверхностные волны. Величина поверхностного импеданса при этом определяются соотношениями:

$$Z_{TM} = \frac{i\beta}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (20)$$

$$Z_{TE} = -\frac{i\omega\mu_0\mu}{\beta}, \quad (21)$$

где  $\beta$  - продольное волновое число (фазовый коэффициент в регулярной линии), связанное с волновым числом среды (фазовым коэффициентом в непоглощающей среде) уравнением связи:

$$k^2 = \beta^2 + \chi^2, \quad (22)$$

$\chi$  - поперечное волновое число (поперечный коэффициент). Уравнение связи иллюстрировано рисунком 5.

Аномальные свойства высокоимпедансная поверхность приобретает вблизи резонансной частоты покрытия  $\omega_0$ . Вблизи нее имеет место так называемая область отсечки, когда поверхностные волны не распространяются, а величина поверхностного импеданса из пассивной становится активной. Для данной области коэффициент бегущей волны  $\gamma = i\beta$  описывается соотношением:



Рисунок 5 – Иллюстрация уравнения связи для непоглощающей среды

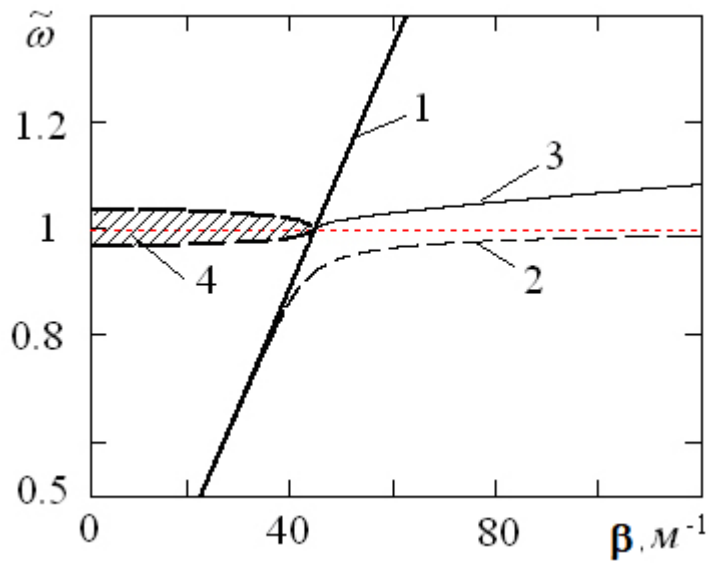


Рисунок 6 - Дисперсионная диаграмма возбуждения поверхностных волн в покрытии:

- 1 – частотная зависимость волнового числа в свободном пространстве;
- 2 – частотная зависимость поверхностных поперечно-магнитных волн;
- 3 – частотные зависимости поверхностных поперечно-электрических волн;
- 4 – частотная зависимость области отсечки

$$\gamma = \begin{cases} k\sqrt{1 - \tilde{Z}^{\pm 2}} & \text{вне зоны отсечки,} \\ k\sqrt{1 + \tilde{Z}^{\pm 2}} & \text{в зоне отсечки,} \end{cases} \quad (23)$$

где  $\tilde{Z} = Z / W_0$  - величина нормированного к сопротивлению свободного пространства поверхностного импеданса.

В соотношении (23) верхний знак соответствует продольному волновому числу поверхностной волны электрического типа, а нижний знак – про-

дольному волновому числу поверхностной волны магнитного типа. Получаемая с использованием выражений (23) дисперсионная диаграмма покрытия с отсечкой показана на рисунке 6.

Анализ рисунка 6 показывает, что условия возбуждения  $TM$ - и  $TE$ -волн различаются. Так, электрические волны ( $TM$ -волны), имеют скорость меньшую скорости света (на рисунке 6 – правее линии света 1) и возбуждаются на металлическом экране. Частным случаем для данных волн является индуцируемый на поверхности металлического экрана электрический ток. Кроме того, поверхностные волны  $TM$ -поляризации поддерживают на частотах ниже резонансной частоты  $HIS$  (ниже горизонтальной штриховой линии с абсциссой  $\tilde{\omega} = 1$ ), а волны  $TE$ -поляризации - на частотах выше резонансной (выше горизонтальной штриховой линии с абсциссой  $\tilde{\omega} = 1$ ). Во всех случаях дисперсионные кривые поверхностных волн начинаются на линии света, а потом отклоняются от нее. Данное отклонение объясняется тем, что фазовая скорость поверхностных волн ниже скорости света, поскольку данные волны являются медленными. Области отсечки 4 располагаются левее линии света 1, т.е. на частотах, где поверхностные волны не возбуждаются.

Границы области отсечки, в которые поверхностные волны не возбуждаются, могут быть определены двумя способами: аналитически и экспериментально.

В первом случае частотный диапазон находится с использованием соотношения:

$$\tilde{\omega}_{1,2} = 1 \mp 0.5 \Delta\omega, \quad (24)$$

где  $\Delta\omega = \frac{\sqrt{L/C}}{W_0}$  - относительная рабочая полоса частот зоны отсечки;

$W_0 = 120\pi$  Ом – волновое сопротивление свободного пространства;

$\tilde{\omega}_{1,2} = \omega_{1,2} / \omega_0$  - нормированные к резонансной частоте частоты нижней и верхней границ диапазона отсечки;

верхний знак в соотношении определяет нижнюю границу, а нижний – верхнюю границу.

Экспериментальный способ используется для ряда частных типов конструкций, например, однослойного покрытия с квадратными пластинами. Для них выражение для фазы коэффициента отражения или просто фазы отражения, как принято обозначать в литературе, имеет вид [42]:

$$\Phi(f) = \theta(f) = \text{Im} \left( - \frac{af^2 + ibf - W_0}{af^2 - ibf - W_0} \right), \quad (25)$$

где  $a = 4\pi^2 W_0 LC$ ,

$b = 2\pi L$  - конструктивные параметры покрытия.

В соотношении (25) для обозначения фазы отражения  $\Phi(f)$  использовано также традиционное в теории метаматериалов обозначение  $\theta(f)$ .

Частотные зависимости фазы отражения также позволяют выделить область отсечки, в которой поверхностные волны не распространяются. Рассмотрим данный анализ на примере покрытия с квадратными пластинами, фаза отражения для которого описывается соотношением (25). Данная зависимость приведена на рисунке 7.

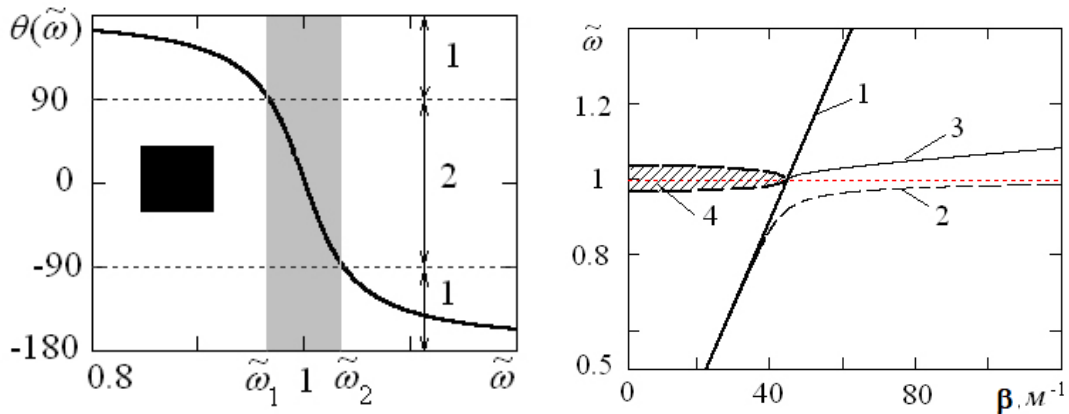


Рисунок 7 - Зависимость фазы коэффициента отражения от частоты

Области отсечки на данном рисунке соответствует область 2, когда фаза отражения изменяется от  $+90^\circ$  до  $-90^\circ$ . Фаза отражения  $0^\circ$  соответствует

резонансной частоте покрытия, отмеченной на рисунке 6 штриховой горизонтальной линией с ординатой 1.

Области возбуждения поверхностных волн соответствуют областям 1. Причем ТМ-волны (аналог волн на металлическом экране) возбуждаются на частотах меньше нормированной резонансной ( $\tilde{\omega}=1$ ), когда фаза отражения равна  $\pi$ , что соответствует кривым 2 на рисунке 6. ТЕ-волны (кривые 3 на рисунке 6) возбуждаются на частотах выше резонансной, когда фаза равна  $-\pi$ .

Выполненное сравнение показывает, что при известной частотной зависимости фазы отражения  $\theta(f)$  проще определить рабочий диапазон высокоимпедансного покрытия. Для найденного частотного диапазона рассчитывают рабочий диапазон частот, определяемый соотношением:

$$B_{rel} = f_u / f_l, \quad (26)$$

где  $f_u$  - верхняя частота, фаза коэффициента отражения равна  $-\pi/2$ ;

$f_l$  - нижняя частота, фаза коэффициента отражения равна  $+\pi/2$ .

Таким образом, управление аномальными свойствами высокоимпедансного покрытия осуществляется в зонах отсечки, т.е. на частотах вблизи резонансной частоты покрытия, при которых распространение поверхностных волн прекращается.

### **3.4 Примеры использования метаматериалов в антенной технике**

Области применения метаматериалов в антенной технике разнообразны. Для примера рассмотрим несколько частных случаев, наиболее часто используемых при конструировании антенн: для управления формой диаграммы направленности и для построения низкопрофильных антенн.

Анализ вариантов использования метаматериалов в антенной технике начнём со случая применения метаматериала типа DZR для изменения формы диаграммы направленности антенны. Пусть метаматериалы используются

для выполнения двухслойного покрытия на несущей конструкции в виде кругового металлического цилиндра радиуса  $a$ . В покрытии один из слоёв изготовлен из материала с показателем преломления, меньшим единицы. Выбор двух слоев покрытия обусловлен тем, что число слоев для таких ММ целесообразно выбирать четным. Толщина слоев покрытия составляет  $t_i$  ( $i=1,2$ ), а отсчет слоев осуществляется снизу (от поверхности металлического цилиндра) вверх. Излучатель (продольный электрический, продольный магнитный или радиальный магнитный диполь) размещается на удалении  $h$  от поверхности верхнего слоя покрытия. Результаты моделирования диаграммы направленности, выполненные с использованием известных соотношений для перечисленных выше типов излучателей показаны на рисунках 8-10.

Полагалось, что круговой цилиндр имел радиус  $a = \lambda$ , излучатель размещался на расстоянии  $h = 0.25\lambda$  от поверхности покрытия, толщина слоев покрытия составляла  $t_i = 0.1\lambda$  ( $i=1,2$ ). При проведении исследований рассматривались два случая: при фиксированных значениях относительной диэлектрической проницаемости изменялось значение относительной магнитной проницаемости, и наоборот.

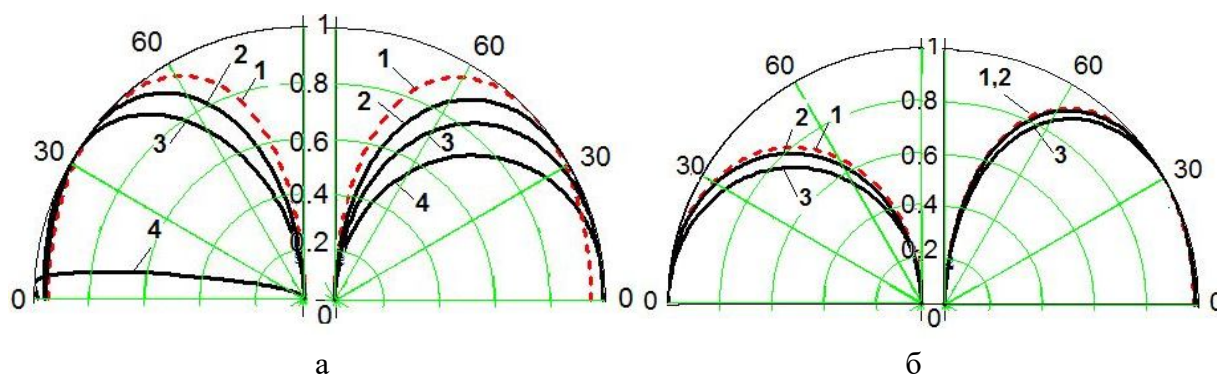


Рисунок 8 - Зависимость ДН продольного электрического диполя от параметров покрытия:

- а -  $\epsilon = 2$ ,  $\mu$  варьируется: 1, 0.8, 0.6 и 0.01 (кривые 1-4);  
б -  $\mu = 2$ ,  $\epsilon$  варьируется: 1, 0.8 и 0.01 (кривые 1-3)



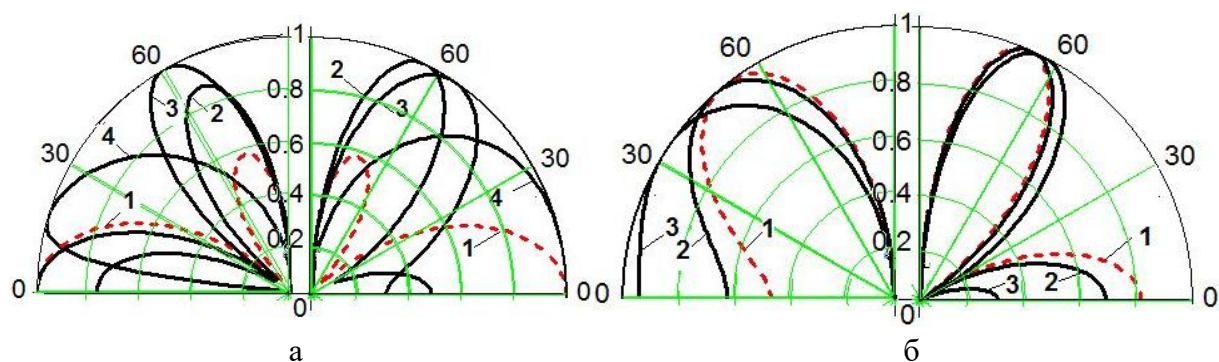


Рисунок 9 - Зависимость ДН продольного магнитного диполя от параметров покрытия:

а -  $\varepsilon = 2$ ,  $\mu$  варьируется: 1, 0.8, 0.6 и 0.01 (кривые 1-4);

б -  $\mu = 2$ ,  $\varepsilon$  варьируется: 1, 0.8 и 0.01 (кривые 1-3)

В первом случае полагалось, что  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ , а  $\mu$  изменялось и принимало соответственно значения 1, 0.8, 0.6 и 0.01. Этим значениям соответствуют рисунки с индексами «а». При этом левое поле иллюстрирует результаты, полученные при изменении магнитных свойств верхнего слоя, а правое поле - нижнего слоя.

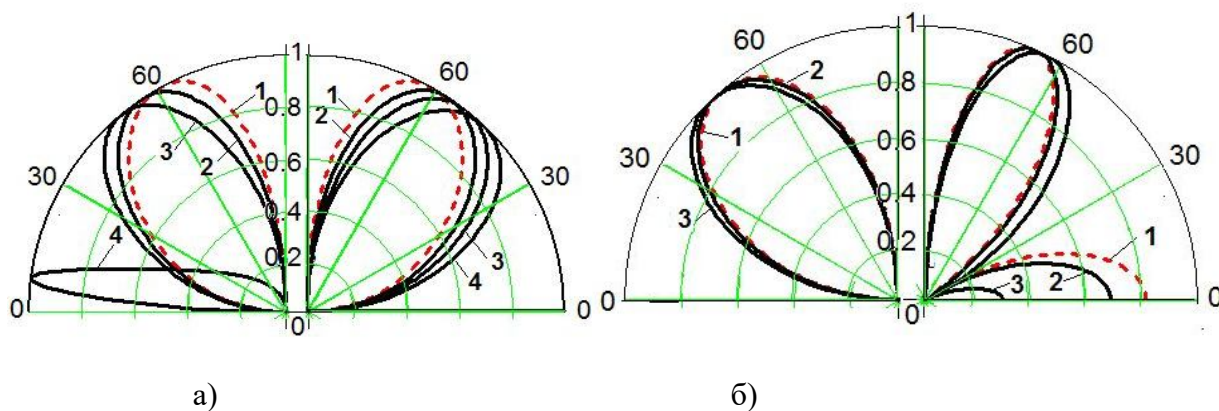


Рисунок 10 - Зависимость ДН радиального магнитного диполя от параметров покрытия:

а -  $\varepsilon = 2$ ,  $\mu$  варьируется: 1, 0.8, 0.6 и 0.01 (кривые 1-4);

б -  $\mu = 2$ ,  $\varepsilon$  варьируется: 1, 0.8 и 0.01 (кривые 1-3)

Во втором случае фиксировалось значение  $\mu = 2$ , а величина относительной диэлектрической проницаемости изменялась, принимая значения 1, 0.8 и 0.01. На рисунках с индексами «б» данным вариантам соответствуют

кривые 1-3. На левом поле показаны результаты, полученные при изменении диэлектрических свойств верхнего слоя, а на правом поле - нижнего слоя.

Анализ приведенных результатов показывает, что наиболее сильно на изменение направленных свойств излучателей оказывает покрытие, у которого магнитные свойства отличаются от единицы. При этом у продольного электрического диполя изменяется ширина главного лепестка диаграммы (лепесток сужается), особенно сильно это наблюдается, если магнитные свойства материала верхнего слоя покрытия стремятся к нулю. Полуширина главного лепестка изменяется примерно в восемь раз, что приводит также к смещению положения в пространстве главного лепестка диаграммы направленности. Изменение диэлектрических свойств материала покрытий также приводят к сужению главного лепестка диаграммы направленности, однако данный эффект проявляется не так сильно.

Для излучателей магнитного типа эффекты, выявленные при изменении параметров покрытия, проявляются наиболее наглядно для продольно ориентированного диполя. В этом случае изменение магнитных свойств материала слоев покрытия приводит не столько к изменению у диаграммы направленности ширины главного лепестка, сколько к изменению ее формы. Это проявляется сначала в замене направлений ориентации главного и первого бокового лепестков диаграммы направленности, а затем в формировании однолепестковой диаграммы направленности при устремлении магнитных свойств материала покрытия к нулю. При изменении диэлектрических свойств материала покрытия наблюдается небольшое смещение главного лепестка, а также изменение уровня бокового излучения (при изменении диэлектрических свойств нижнего слоя покрытия). Для радиально ориентированного магнитного диполя изменение магнитных свойств покрытия приводит к смещению направления главного лепестка диаграммы направленности, наиболее сильного (примерно на 50 градусов) при уменьшении магнитных свойств верхнего слоя. Эффекты, наблюдаемые при уменьшении диэлектри-

ческих свойств материала покрытия, те же, что и для продольно ориентированного магнитного диполя.

Оценим влияние покрытия из метатериалов смешанного типа на характеристики согласования со свободным пространством расположенной вблизи антенны. Рассмотрим случай размещения горизонтального полуволнового электрического вибратора вблизи покрытия из ММ смешанного типа, обеспечивающего минимальную фазу коэффициента отражения  $\min(\arg(S_{11}))$ , т.е. максимальное значение характеристического сопротивления покрытия. На рисунке 11 приводятся результаты исследования зависимости активной (сплошная линия) и реактивной (штриховая линия) составляющих входного сопротивления вибратора от его удаления  $h/\lambda$  от поверхности покрытия.

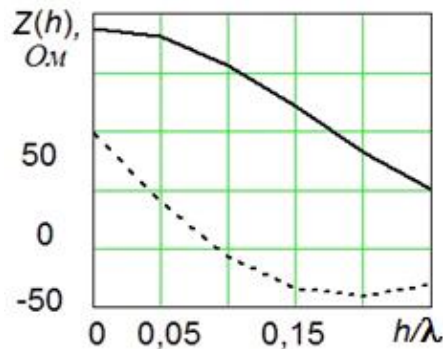


Рисунок 11 - Зависимость входного сопротивления горизонтального полуволнового электрического вибратора от удаления излучателя от поверхности покрытия:  
сплошная линия – активная составляющая;  
штриховая линия – реактивная составляющая

Анализ полученных результатов показывает, что применение покрытий из ММ смешанного типа дает возможность размещать излучатели на удалении порядка  $h/\lambda = 0.1$  (по сравнению с традиционным  $h/\lambda = 0.25$  вблизи металлического экрана) от поверхности экрана, обеспечивая при этом максимальное значение активной составляющей входного сопротивления и близкое к нулю значение реактивной составляющей. Как известно из ряда работ при индуктивном характеристическом сопротивлении покрытия и описанном выше соотношении между активной и реактивной составляющими входного

сопротивления антенны можно говорить о создании в эквивалентной схеме замещения последовательного резонанса. При таком резонансе амплитуда тока в антенне возрастает приблизительно на два порядка по сравнению с амплитудой тока без экрана с высокоимпедансным покрытием.