

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Радиоэлектроника»

На правах рукописи

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВЗАИМНОЙ СВЯЗИ
ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ В СОСТАВЕ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ

Методические указания

Ростов-на-Дону
ДГТУ
2018

УДК 62

Составители: М.Ю., Звездина, Ю.А. Шокова

Вычисление коэффициентов взаимной связи излучателей в
составе антенной решетки: метод. указания. – Ростов-на-Дону:
Донской гос. техн. ун-т, 2018. – 15 с.

Приводятся методические указания по выполнению лабораторной ра-
боты по дисциплине «Электромагнитная совместимость радиоэлектронных и
телекоммуникационных систем», а также курсовому проектированию по дис-
циплине «Устройства сверхвысокой частоты (СВЧ) и антенны» направления
подготовки 11.03.01 «Радиотехника».

Предназначены для обучающихся направления подготовки 11.04.02 Ин-
фокоммуникационные технологии и системы связи, программа «Беспровод-
ные инфокоммуникационные сети» всех форм обучения, а также направления
11.03.01 Радиотехника, профиль Радиотехнические системы передачи, приема
и обработки сигналов.

УДК 62

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Донского государственного технического университета

Научный редактор канд. техн. наук, доцент О.Ю. Назарова

Ответственный за выпуск зав. кафедрой «Радиоэлектроника»
д-р физ.-мат. наук, доцент М.Ю. Звездина

В печать _____.20__ г.
Формат 60×84/16. Объем ____ усл.п.л.
Тираж ____ экз. Заказ № ____.

Издательский центр ДГТУ
Адрес университета и полиграфического предприятия:
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

© Донской государственный
технический университет,
2018

Цель работы

Привитие умений и навыков вычисления коэффициентов взаимной связи в элементах антенной решетки излучателей на основе самостоятельно разработанной программы, оптимизированной по критерию минимизации вычислительных затрат.

1 Теоретическая часть

1.1 Общие вопросы вычисления матрицы сопротивлений

Задача нахождения коэффициентов матрицы сопротивлений возникает при нахождении токов в антенной системе из нескольких излучателей, например, электрических вибраторов. В зависимости от способа возбуждения таких систем различают активные вибраторы, входы которых подсоединены к генераторам, и пассивные вибраторы, возбуждаемые электромагнитным полем других вибраторов. Входы пассивных вибраторов обычно подсоединяют к реактивным нагрузочным сопротивлениям, не вызывающим снижения КПД антенны.

Схема замещения простейшей антенной системы из двух одинаковых параллельных вибраторов, показанной на рисунке 1, эквивалентным четырехполосником представлена на рисунке 2. Диагональные элементы матрицы сопротивлений представляют собой собственные сопротивления вибраторов, недиагональные - взаимные сопротивления, учитывающие электромагнитную связь между вибраторами.

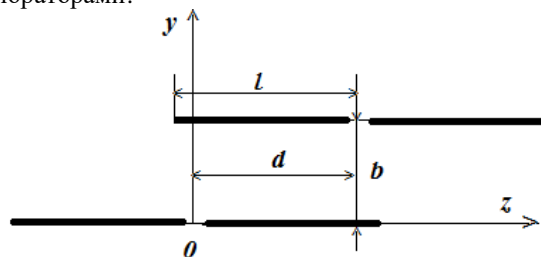


Рисунок 1 – Геометрия задачи

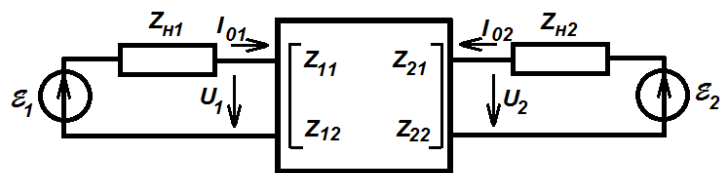


Рисунок 2 – Эквивалентная схема замещения антенной системы из двух коллинеарных электрических вибраторов

При не слишком малых расстояниях между тонкими вибраторами можно считать справедливым в первом приближении синусоидальный закон распределения тока вдоль вибраторов:

$$I_{z1,2}(z) = I_{01,2} \frac{\sin(k(l_{1,2} - |z|))}{\sin(kl_{1,2})}, \quad (1)$$

где координата z отсчитывается от середины каждого вибратора. Входные токи I_{01} и I_{02} определяются из решения системы линейных уравнений Кирхгофа:

$$\begin{cases} U_1 = I_{01}Z_{11} + I_{02}Z_{12} = e_1 - I_{01}Z_{н1}, \\ U_2 = I_{01}Z_{21} + I_{02}Z_{22} = e_2 - I_{02}Z_{н2}, \end{cases} \quad (2)$$

где e_1, e_2 - эдс возбуждающих генераторов;

$Z_{н1}, Z_{н2}$ - внутренние сопротивления генераторов (в пассивном вибраторе следует полагать $e_1 = 0$ и считать $Z_{н1}$ сопротивлением нагрузки).

Для нахождения взаимных сопротивлений вибраторов был предложен приближенный **метод наводимых эдс** [1-3]. В соответствии с ним в качестве основных расчетных соотношений для определения взаимных и собственных сопротивлений используются выражения вида:

$$Z_{11} = - \frac{1}{|I_{01}|^2} \oint_{-l}^l E_{z11} I_{z1}^* dz, \quad (3a) \quad Z_{12} = - \frac{1}{I_{01}^* I_{02}} \oint_{-l}^l E_{z12} I_{z1}^* dz. \quad (3б)$$

Выражения для Z_{22} и $Z_{21} = Z_{12}$ получаются очевидной заменой индексов. Касательные составляющие E_{z11} и E_{z12} представляют собой эдс, приходящиеся на единицу длины вдоль боковой поверхности вибратора и порождаемые токами либо первого, либо второго вибратора, что и объясняет название «метод наводимых эдс».

Особенностью метода наводимых эдс является то, что небольшие ошибки в задании закона распределения тока (первого порядка малости) приводят к значительно меньшим ошибкам во взаимных и собственных сопротивлениях (второго порядка малости). Именно этим и объясняется широкое применение данного метода в инженерных расчетах вибраторных антенн.

Наилучшие результаты метод дает для взаимных сопротивлений полуволновых резонансных вибраторов, когда распределение тока не зависит от места включения генератора и характера распределения возбуждающей эдс [1]. При численной реализации формулы (3а) возникают сложности, обусловленные особенностью функции Грина. Они имеют место при подстановке в указанные выражения соотношения, определяющие касательные составляющие электрического поля на поверхности вибратора и описываемые еще одним интегралом вдоль вибратора. В момент наблюдения точка наблюдения совпадает с точкой источника функция Грина за счет своего истокообразного характера обращается в бесконечность. В связи с этим при численной реализации данный

момент стараются выделить и представить в замкнутой форме, например, с помощью метода Стреттона-Чу [3].

1.2 Методы вычисления коэффициентов взаимной связи

Рассмотрим два наиболее часто используемых способа получения оценок коэффициентов взаимной связи полуволновых вибраторов:

- с использованием аппроксимационных полиномов, предложенных в работе [1];
- с использованием аналитических выражений, приведенных в работе [3].

Выбор метода зависит от геометрии решаемой задачи и необходимости получения физической трактовки получаемым результатам. Так, при получении грубой оценки, когда полагается, что излучатели размещаются в свободном пространстве либо вблизи бесконечного металлического экрана, целесообразно использовать первый метод, описанный в известной работе Г.А. Лаврова [1]. При размещении излучателей вблизи тел другой канонической формы, например, кругового цилиндра, сферы, применяется второй метод, получивший название метода Стреттона-Чу [3].

При использовании аппроксимационных полиномов величина коэффициента собственного сопротивления для вибратора с соотношением длины вибратора к его радиусу l_a и длиной плеча l собственное сопротивление вычисляется с использованием формулы [1]:

$$Z_{11} = 30(R1 + R2 + R3) + j30(X1 + X2), \quad (4)$$

где $R1 = 2(g + \ln(2kl) - Ci(2kl))$;

$$R2 = \sin(2kl)(Si(4kl) - 2Si(2kl));$$

$$R3 = \cos(2kl)(g + \ln(kl) + Ci(4kl) - 2Ci(2kl));$$

$$X1 = 2Si(2kl) + \sin(2kl)(g + \ln(kl) + Ci(4kl) - 2\ln(l_a));$$

$$X2 = -\cos(2kl)(Si(4kl) - 2Si(2kl)),$$

$g = 0.5772157$ - число Эйлера;

$k = 2\pi / \lambda = 2\pi f / c$ - волновое число свободного пространства,

f - частота передатчика [Гц],

l - длина волны в свободном пространстве,

$c = 3 \times 10^8$ - скорость света в свободном пространстве [м/с].

Входящие в соотношения (4) функции $Si(x)$ и $Ci(x)$ являются синус- и косинус-интегралами и могут быть найдены с использованием аппроксимационных выражений [4]:

- при $|x| < 4$

$$Si(x) = \sum_{n=0}^{10} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}, \quad (5a)$$

- при $4 \leq |x| < 5$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du, \quad (56)$$

- при $|x| > 5$

$$Si(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos(x)}{x} \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n (2n)!}{x^{2n}} - \frac{\sin(x)}{x} \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n (2n+1)!}{x^{2n+1}}, \quad (5b)$$

- при $|x| < 10^{-3}$

$$Ci(x) = -100, \quad (6a)$$

- при $10^{-3} \leq |x| < 4.5$

$$Ci(x) = - \int_x^{100} \frac{\cos(u)}{u} du, \quad (6b)$$

- при $|x| \geq 4.5$

$$Ci(x) = \frac{\sin(x)}{x} \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n (2n)!}{x^{2n}} - \frac{\cos(x)}{x} \sum_{n=0}^3 \frac{(-1)^n (2n+1)!}{x^{2n+1}}. \quad (6b)$$

При использовании метода Стреттона-Чу коэффициент взаимного сопротивления определяется по формуле [3]:

$$Z_{11} = 30j \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{p^2}{(2kl)^2} \frac{\partial}{\partial \phi} E_{21}(kz_0, kz_2, a, b, d) + \frac{p}{2kl} E_{22}(kz_0, kz_2, a, b, d) \right) d\phi, \quad (7)$$

$$\text{где } E_{21} = \int_{-kl}^{kl} \sin(kl - |kz_0|) \int_{-kl+kd}^{kl+kd} \sin(kl - |kz_2 - kd|) G(kz_0, kz_2, a, b) dz_2 dz_0,$$

$$E_{22} = \int_{-kl+kd}^{kl+kd} \sin(kl - |kz_2 - kd|) (G(kl, kz_2, a, b) + G(-kl, kz_2, a, b)) dz_2,$$

$$G(kl, kz_2, a, b) = \frac{\exp(-i\sqrt{(kz - kz_2)^2 + b^2 + a^2})}{\sqrt{(kz - kz_2)^2 + b^2 + a^2}},$$

$a = (1..5) \times 10^{-4}$ - радиус вибратора [длин волн] в предположении модели тонкого вибратора..

1.3 Пример вычисления коэффициентов взаимной связи элементов антенной решетки

1.3.1 Рассмотрим частный случай вычисления коэффициентов взаимной связи в пределах плоской (2D) антенной решетки методом Стреттона-Чу. Использование аппроксимационного полинома для поставленной задачи невозможно, поскольку, как следует из анализа текстов процедур, приведенных в ПРИЛОЖЕНИЯХ А и Б соответственно, метод Лаврова предназначен для нахождения только собственного сопротивления антенны.

Для контроля получаемых результатов в ПРИЛОЖЕНИИ В приводятся результаты вычисления коэффициентов взаимной связи, полученных экспериментальным способом для полуволнового вибратора [5, 6]. В ПРИЛОЖЕНИИ В используются обозначения, показанные на рисунке 1. Символом «a» обозначен сдвиг центров излучателей в горизонтальном направлении.

1.3.2 Рассмотрим примеры вычисления коэффициентов взаимной связи для плоской антенной решетки размерности $N = N_x \times N_y = 3 \times 3$ полуволновых вибраторов, размещаемых с шагом $d_x = d_y = 0.5\lambda$ по каждому из направлений. Геометрия задачи показана на рисунке 3.

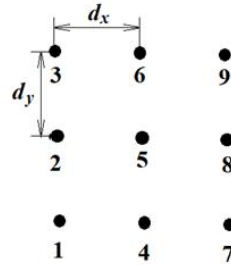


Рисунок 3 – Геометрии исследуемых вариантов антенных решеток

Для вычисления коэффициентов взаимной связи формируется матрица размерностью 9×9 . Обозначения элементов показаны на рисунке 3, а вид матрицы показана соотношением:

$$Z = \begin{pmatrix} \hat{e}Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} & Z_{17} & Z_{18} & \hat{u}Z_{19} \\ \hat{e}Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} & Z_{27} & Z_{28} & \hat{u}Z_{29} \\ \hat{e}Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} & Z_{37} & Z_{38} & \hat{u}Z_{39} \\ \hat{e}Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} & Z_{47} & Z_{48} & \hat{u}Z_{49} \\ \hat{e}Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} & Z_{57} & Z_{58} & \hat{u}Z_{59} \\ \hat{e}Z_{61} & Z_{62} & Z_{63} & Z_{64} & Z_{65} & Z_{66} & Z_{67} & Z_{68} & \hat{u}Z_{69} \\ \hat{e}Z_{71} & Z_{72} & Z_{73} & Z_{74} & Z_{75} & Z_{76} & Z_{77} & Z_{78} & \hat{u}Z_{79} \\ \hat{e}Z_{81} & Z_{82} & Z_{83} & Z_{84} & Z_{85} & Z_{86} & Z_{87} & Z_{88} & \hat{u}Z_{89} \\ \hat{e}Z_{91} & Z_{92} & Z_{93} & Z_{94} & Z_{95} & Z_{96} & Z_{97} & Z_{98} & \hat{u}Z_{99} \end{pmatrix} \quad (8)$$

В данном соотношении первый символ индекса обозначает элемент, для которого рассчитывается коэффициент взаимной связи, второй символ – номер элемента, с которым вычисляется связь.

Анализ вида матрицы (8) показывает, что размерность рассчитываемых матриц составляет N^2 . Время вычислений элементов матрицы различное. Наибольшие вычислительные затраты, как показано в [7], приходится на нахождение собственных сопротивлений, располагаемых на диагонали

матрицы. В связи с этим возникает вопрос их сокращения с учетом их физического смысла и размещения в составе решетки.

Выделим возможности сокращения времени вычисления. К ним, в частности, можно отнести три:

- предположение об идентичности излучателей в составе решетки позволяет сократить наиболее длительный процесс вычисления собственных элементов (диагональных элементов) до одного, полагая, что

$$Z_{ii} = Z_{11} \quad (i = 0, 1, \dots, N);$$

- учесть особенности заполнения матрицы, обусловленные геометрией размещения. Пример симметрии значений сдвигов между излучателями в горизонтальной и вертикальной плоскостях для рассматриваемой геометрии приведен на рисунке 4.

$$\frac{ZZ1}{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad a$$

$$\frac{ZZ2}{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad b$$

Рисунок 4 – Сдвиги между элементами антенной решетки:
a – в горизонтальной плоскости; б – в вертикальной плоскости

- возможность заполнения матрицы по шаблону, учитывающему все возможные варианты расположения излучателей друг относительно друга.

Для пояснения данного факта обратимся к результирующей матрице, показанной на рисунке 5.

$$\begin{pmatrix} 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 4.059 - 4.205i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -0.703 + 4.053i & 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i & -4.119 - 0.722i \\ -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i \\ 4.059 - 4.205i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -0.703 + 4.053i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & -4.119 - 0.722i & -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i \\ -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -0.703 + 4.053i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 4.059 - 4.205i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -0.703 + 4.053i \\ 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i \\ -0.703 + 4.053i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 4.059 - 4.205i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -0.703 + 4.053i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i \\ 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i & -4.119 - 0.722i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -0.703 + 4.053i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 4.059 - 4.205i \\ -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i \\ -4.119 - 0.722i & -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i & -0.703 + 4.053i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 4.059 - 4.205i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i \end{pmatrix}$$

Рисунок 5 – Полная матрица коэффициентов взаимной связи

Анализ данной матрицы показывает, что

- элементы матрицы симметричны относительно диагонали;
- элементы строк матрицы с номерами больше первого могут быть получены из первой строки путем установки первого элемента на диагональ и обрезаия ее до размерности матрицы (элементы верхней треугольной матрицы).

Элементы нижней треугольной матрицы получают симметричным отражением элементов относительно диагонали.

Фрагмент листинга программы приведен в ПРИЛОЖЕНИИ Г.

В результате предложенной оптимизации алгоритма время вычисления матрицы сокращается в N раз, поскольку расчет осуществляется только для первой строки, а остальные операции представляют собой простые операции пересыла.

Вид матрицы (8) с учетом сделанных замечаний принимает вид, описываемый соотношением

$$\begin{bmatrix} [B1] & [B2] & [B3] \\ [B2] & [B1] & [B2] \\ [B3] & [B2] & [B1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix} \quad (9)$$

где

$$[B1] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ \dot{Z}_{12} & Z_{11} & Z_{12} \\ \dot{Z}_{13} & Z_{12} & Z_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix}, \quad [B2] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{14} & Z_{15} & Z_{16} \\ \dot{Z}_{15} & Z_{14} & Z_{15} \\ \dot{Z}_{16} & Z_{15} & Z_{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix},$$

$$[B3] = \begin{bmatrix} \dot{Z}_{17} & Z_{18} & Z_{19} \\ \dot{Z}_{18} & Z_{17} & Z_{18} \\ \dot{Z}_{19} & Z_{18} & Z_{17} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \\ \dot{U} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Анализ соотношений (9) и (10) показывает, что число блоков зависит от числа строк, образующих антенную решетку, а размерность внутренних блоков определяется числом элементов в строке. Каждый из блоков описывает взаимную связь первого элемента с элементами возможных строк решетки. Так, в рассматриваемом примере блок $B1$ определяет взаимную связь первого элемента с элементами первой строки, блок $B2$ – с элементами второй строки, блок $B3$ – с элементами третьей строки.

3 Описание работы

Цель работы

Целью практического занятия является приобретение навыков расчета математических моделей спектров излучений различных типов передатчиков при изменении значений их параметров.

Подготовка к лабораторной работе

1. Изучить теоретические основы вычисления коэффициентов взаимной связи излучателей в составе антенной решетки.
2. Подготовить бланк отчета по лабораторной работе с краткими сведениями из теории.

Алгоритм выполнения лабораторной работы

Работа выполняется в несколько этапов.

1. Исследование влияния задания радиуса вибратора в модели Стреттона-Чу на точность получаемых результатов. В качестве сравнения использовать результаты, получаемые по модели Лаврова в предположении тонкого вибратора. Вибратор считать полуволновым (длина плеча $l = 0.25\lambda$). Радиус вибратора выбирать из интервала значений $\{10^{-3}; 10^{-4}; 10^{-5}\}$.

Результаты вычислений занести в таблицу 1 и выполнить их сравнение, обращая внимание на реактивную составляющую.

Таблица 1 – Влияние радиуса вибратора на точность получаемых результатов

Радиус вибратора	Аппроксимационная формула		Метод Стреттона-Чу	
	R , Ом	X , Ом	R , Ом	X , Ом
10^{-3}				
10^{-4}				
10^{-5}				

2. С использованием метода зеркальных изображений вычислить собственное сопротивление горизонтального полуволнового вибратора при удалении h его от идеально проводящего экрана на расстояние:

- 0.125λ ;
- 0.25λ ;
- 0.5λ .

Нарисовать геометрию задачи и сравнить полученные значения с табличными, приведенными в ПРИЛОЖЕНИИ В.

Методические указания по вычислению:

- вычислить собственное сопротивление излучателя в свободном пространстве. Допустим R и X ;
- с использованием метода зеркальных изображений влияние экрана заменяется на фиктивный излучатель, расположенный на удалении $2h$ от истинного излучателя, как показано на рисунке 6.

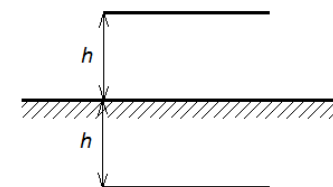


Рисунок 6 – Геометрия задачи нахождения собственного сопротивления излучателя вблизи металлического экрана методом зеркальных изображений

Влияние границы раздела сред (металлический экран) учитывается комплексной амплитудой тока (по вычисленному значению коэффициента отражения Френеля) [3].

Вычисляется или находится из таблицы, приведенной в ПРИЛОЖЕНИИ А, величина взаимного сопротивления при смещении излучателя в направлении $b/l = 2h$, т.е. значения R_1 и X_1 ;

- поскольку коэффициент отражения для горизонтального электрического вибратора вблизи металлического экрана равен $R_E = -1$, то величина собственного сопротивления вибратора будет определяться как суперпозиция двух составляющих по формуле:

$$Z = (R - R_1) + j(X - X_1). \quad (11)$$

3. Построить блочную матрицу для вычисления коэффициентов взаимной связи антенной решетки 4×4 элемента. Параметры координатной сетки взять те же, что и в рассмотренном в п.1 примере.

Записать формулу для вычисления индексов элементов при заполнении блочных матриц.

4. Анализ полученных результатов, оформление выводов и отчета по проведенной работе.

Содержание отчета

1. Рисунки, поясняющие геометрию задачи.
2. Используемые расчетные соотношения.
3. Графики, заданные в описании работы.
4. Краткие выводы по работе.

Контрольные вопросы

1. Для чего необходимо значение собственного и взаимных сопротивлений излучателей?
2. Чем отличаются вычисления при нахождении собственного и взаимного сопротивлений вибраторов?
3. Какие методы применяются для нахождения собственного и взаимных сопротивлений излучателей?
4. Как влияет используемый метод вычисления собственных сопротивлений на точность получаемых результатов?
5. В чем заключается метод зеркальных изображений?
6. Как применяется метод зеркальных изображений для нахождения собственных сопротивлений вибраторов вблизи границы раздела сред?
7. Каким образом формируется матрица коэффициентов взаимной связи излучателей в составе антенной решетки?
8. Каким образом можно сократить вычислительные затраты при нахождении матрицы коэффициентов взаимной связи?
9. Каков физический смысл блочных матриц?
10. В каких случаях возможно заполнение диагональных элементов матрицы коэффициентов взаимной связи одинаковыми элементами?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лавров Г.А. Взаимное влияние линейных вибраторных антенн. М.: Связь, 1975. 126 с.
2. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики. М.: Высш. шк., 1991.
3. Неганов В.А. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Радио и связь, 2005.
4. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. М.: Наука, 1964. 344 с.
5. Чернышев В.П. Распространение радиоволн и антенно-фидерные устройства. М.: Радио и связь, 1982. 144 с.
6. Звездина М.Ю., Шокова Ю.А. Моделирование характеристик направленности антенн: лабораторный практикум. М.: Изд. Дом «Академия Естествознания», 2016. 90 с.: [Электронный ресурс] / URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_27356871_25862557.pdf (дата обращения: 20.05.2018).
7. Габриэлян Д.Д., Звездина М.Ю. Взаимное сопротивление продольных вибраторов вблизи импедансного кругового цилиндра // Радиотехника. 2000. № 5. С. 67-69.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг процедур для вычисления коэффициентов взаимной связи излучателей аппроксимационным методом

Вычисление взаимной связи двух вибраторов по монографии Лавров А.Г. "Взаимное влияние линейных вибраторных антенн". М.: Радио и связь, 1975. 128 с.

1. Задание функций интегрального синуса и интегрального косинуса

$$S11(x) := \int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du \quad C11(x) := - \int_x^{100} \frac{\cos(u)}{u} du$$

$$S01(x) := \sum_{n=0}^{10} \left[(-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot (2n+1)!} \right] \quad C01(x) := \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{10} \left[(-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n) \cdot (2n)!} \right]$$

$$S02(x) := \frac{\pi}{2} - \frac{\cos(x)}{x} \cdot \sum_{n=0}^3 \left[(-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right] - \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sum_{n=0}^3 \left[(-1)^n \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right]$$

$$C02(x) := \frac{\sin(x)}{x} \cdot \sum_{n=0}^3 \left[(-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{x^{2n}} \right] - \frac{\cos(x)}{x} \cdot \sum_{n=0}^3 \left[(-1)^n \cdot \frac{(2n+1)!}{x^{2n+1}} \right]$$

$$Si(x) := \begin{cases} S01(x) & \text{if } |x| < 4 \\ S11(x) & \text{if } 4 \leq |x| < 5 \\ S02(x) & \text{otherwise} \end{cases} \quad Ci(x) := \begin{cases} -100 & \text{if } |x| < 10^{-3} \\ \text{otherwise} \\ C01(x) & \text{if } |x| < 4.5 \\ C02(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

2. Задание постоянных для расчетов

$\gamma = 0.5772157$ Число Эйлера

$\beta = 2 \cdot \pi$ Волновое число свободного пространства для расчетов в электрических длинах волн

3. Процедуры для вычисления собственного сопротивления

Активная составляющая сопротивления

$$Rs1(\beta, l, la) := 2 \cdot (\gamma + \ln(2 \cdot \beta \cdot l) - Ci(2 \cdot \beta \cdot l))$$

$$Rs2(\beta, l, la) := \sin(2 \cdot \beta \cdot l) \cdot (Si(4 \cdot \beta \cdot l) - 2 \cdot Si(2 \cdot \beta \cdot l))$$

$$Rs3(\beta, l, la) := \cos(2 \cdot \beta \cdot l) \cdot [(\gamma + \ln(\beta \cdot l)) + Ci(4 \cdot \beta \cdot l) - 2 \cdot Ci(2 \cdot \beta \cdot l)]$$

$$R1(\beta, l, la) := (Rs1(\beta, l, la) + Rs2(\beta, l, la) + Rs3(\beta, l, la)) \cdot 30$$

Реактивная составляющая сопротивления

$$Xs1(\beta, l, la) := 2 \cdot Si(2 \cdot \beta \cdot l) + \sin(2 \cdot \beta \cdot l) \cdot (\gamma + \ln(\beta \cdot l) + Ci(4 \cdot \beta \cdot l) - 2 \cdot Ci(2 \cdot \beta \cdot l) - 2 \ln(la))$$

$$Xs2(\beta, l, la) := \cos(2 \cdot \beta \cdot l) \cdot (-Si(4 \cdot \beta \cdot l) + 2 \cdot Si(2 \cdot \beta \cdot l))$$

$$X1(\beta, l, la) := (Xs1(\beta, l, la) + Xs2(\beta, l, la)) \cdot 30$$

4. Контрольные примеры расчета

- Расчет синус- и косинус-интегралов

	$x := 0.01$	$Si(x) = 0.009999994$	$Ci(x) = -4.02797952$
Проверка	$\frac{x}{\lambda} := 0.1$	$Si(x) = 0.09994446$	$Ci(x) = -1.72786839$
	$\frac{x}{\lambda} := 65$	$Si(x) = 1.57924996$	$Ci(x) = 0.01284737$

- Расчет собственного сопротивления полуволнового вибратора

$\frac{l}{\lambda} := 0.25$ Длина вибратора в длинах волн

$a := 0.0003$ Радиус вибратора в длинах волн

$la := \frac{1}{a}$ Отношение длины вибратора к радиусу $la = 833.333$

$$Z := R1(\beta, l, la) + i \cdot X1(\beta, l, la) \quad Z = 73.093 + 42.573i$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Листинг процедур для вычисления коэффициентов взаимной связи излучателей методом Стреттона-Чу

Вычисление взаимного сопротивления методом Стреттона-Чу

1. Задание функции Грина свободного пространства

$$G(z, z1, a, b, y) := \frac{\exp[-i \cdot \sqrt{(z - z1)^2 + (y - b)^2 + a^2}]}{\sqrt{(z - z1)^2 + (y - b)^2 + a^2}}$$

2. Задание выражения сопротивления излучения вибратора (по методу Стреттона-Чу)

$$E21(1, z, z1, a, d, b, y) := \int_{-1}^1 \sin(1 - |z0|) \cdot \int_{-1+d}^{1+d} \sin(1 - |z2 - d|) \cdot G(z0, z2, a, b, y) dz2 dz0$$

$$E22(1, z, z1, a, d, b, y) := \int_{-1+d}^{1+d} (G(1, z2, a, b, y) + G(-1, z2, a, b, y)) \cdot \sin((1 - |z2 - d|)) dz2$$

$$E2(1, z, z1, a, d, b, y) := \left[1 - \frac{\pi^2}{(2 \cdot 1)^2} \right] \cdot E21(1, z, z1, a, d, b, y) + \frac{\pi}{2 \cdot 1} \cdot E22(1, z, z1, a, d, b, y)$$

3. Вычисление взаимного сопротивления вибратора

$$R\Sigma(1, z, z1, a, d, b, y) := 30 \cdot i \cdot E2(1, z, z1, a, d, b, y)$$

4. Контрольный пример вычисления взаимного сопротивления вибратора

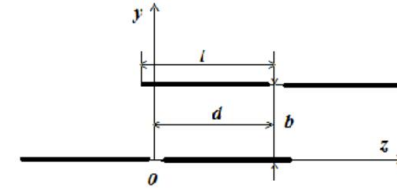


Рисунок 1 – Геометрия задачи

4.1. Задание исходных данных

Волновое число	$k := 2 \cdot \pi$		
Длина плеча вибратора (в длинах волн)	$l_w := 0.25$		
Радиус вибратора (относительно длины вибратора)	$a := 10^{-6}$		
Положение начальной точки 1-го вибратора (в длинах волн)	$x := 0$	$y := 0$	$z := 0$
Сдвиг в осевом направлении между центрами вибраторов	$d := 0$		
Сдвиг в перпендикулярном направлении между центрами вибраторов	$b := 0$		
Положение начальной точки 2-го вибратора (в длинах волн)	$z1 := 0$	$x1 := 0$	$y1 := 0$

4.2. Вычисление взаимного сопротивления вибратора

$$\begin{aligned} d_w &:= d \cdot k & l_w &:= l \cdot k & a_w &:= a \cdot k & z1_w &:= z1 \cdot k & b_w &:= b \cdot k \\ Z &:= R\Sigma(1, z, z1, a, d, b, y) & Z &= 73.13 + 42.545i \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Коэффициенты взаимной связи полуволновых вибраторов [5]

b/l	$a/l = 0$		$a/l = 0.5$		$a/l = 1$		$a/l = 1.5$	
	$R, \text{ Ом}$	$X, \text{ Ом}$	$R, \text{ Ом}$	$X, \text{ Ом}$	$R, \text{ Ом}$	$X, \text{ Ом}$	$R, \text{ Ом}$	$X, \text{ Ом}$
0	73,1	42,5	26,4	20,2	-4,1	-0,7	1,7	0,2
0,1	67,3	7,5	23,5	3,1	-4,1	-0,4	1,7	0,1
0,2	51,4	-19,2	15,7	-8,9	-4,0	0,5	1,7	-0,1
0,3	29,3	-34,4	5,2	-14,5	-3,5	1,8	1,6	-0,5
0,4	6,2	-37,5	-4,9	-13,7	-2,4	3,1	1,4	-0,9
0,5	-12,5	-29,9	-11,9	-7,9	-0,8	4,1	1,1	-1,4
0,6	-23,3	-15,9	-14,1	0,4	1,5	4,2	0,5	-1,8
0,7	-24,9	-0,2	-11,3	8,1	3,6	3,2	-0,4	-2,0
0,8	-18,5	12,2	-4,9	12,6	5,1	1,2	-1,3	-1,9
0,9	-7,5	18,5	2,8	12,8	5,3	-1,6	-2,1	-1,3
1,0	4,0	17,7	9,0	8,9	4,1	-4,2	-2,7	-0,3
1,1	12,4	11,3	12,	2,4	1,5	-5,9	-2,8	1,0
1,2	15,2	1,9	10,8	-4,5	-1,6	-6,0	-2,2	2,2
1,3	12,6	-6,7	6,3	-9,3	-4,5	-4,5	-1,1	3,2
1,4	6,0	-11,9	-0,1	-10,8	-6,3	-1,6	0,4	3,5
1,5	-1,8	-12,3	-5,8	-8,5	-6,2	1,9	2,1	3,1
1,6	-8,1	-8,4	-9,2	-3,6	-4,3	4,8	3,4	1,8
1,7	-10,9	-2,0	-9,3	2,2	-1,2	6,4	4,0	0
1,8	-9,4	4,4	-6,1	6,7	2,4	6,0	3,6	-1,9
1,9	-4,8	8,7	-1,2	8,7	5,1	3,8	2,2	-3,5
2,0	1,1	9,4	3,9	7,5	6,3	0,4	-0,1	-4,2
2,1	6,1	6,7	7,2	3,8	5,4	-3,0	-1,9	-3,8
2,2	8,4	1,8	7,8	-1,0	2,9	-5,3	-3,6	-2,4
2,3	7,6	-3,3	5,6	-5,1	-0,5	-5,9	4,3	-0,2
2,4	4,0	-6,8	1,6	-7,1	-3,6	-4,6	-3,8	2,0
2,5	-0,7	-7,5	-2,7	-6,5	-5,4	-1,8	-2,2	3,7
2,6	-4,8	-5,5	-5,7	-3,7	-5,4	1,5	0	4,3
2,7	-6,9	-1,6	-6,6	0,3	-3,6	4,2	2,3	3,6
2,8	-6,3	2,6	-5,0	3,9	-0,7	5,4	3,8	1,9
2,9	-3,4	5,6	-1,8	5,9	2,4	4,7	4,1	-0,4
3,0	-0,3	6,4	1,9	5,7	4,5	2,5	3,3	-2,6

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Фрагмент листинга оптимизированной процедуры вычисления матрицы взаимных связей элементов антенной решетки

1. Задание координат элементов антенной решетки

$N_x := 3$ $N_y := 3$ $dx := 0.5$ $dy := 0.5$

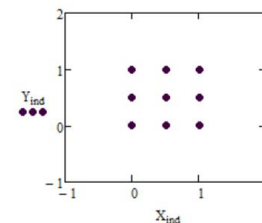
```

KOOR(Nx,Ny,dx,dy) :=
ind ← 0
for i ∈ 0..Nx - 1
  x ← i·dx
  for j ∈ 0..Ny - 1
    y ← j·dy
    KKind,0 ← x
    KKind,1 ← y
    ind ← ind + 1
  KK

```

$KR := KOOR(Nx,Ny,dx,dy)$ $X := KR^{(0)}$ $Y := KR^{(1)}$ $NN := \text{last}(X)$

$ind := 0..NN$



Геометрия расположения излучателей в составе антенной решетки

2. Вычисление коэффициентов взаимной связи без оптимизации алгоритма

Волновое число

$k_{\text{вв}} := 2 \cdot \pi$

Длина плеча вибратора (в длинах волн)

$l_{\text{вв}} := 0.25$

Радиус вибратора (относительно длины вибратора)

$a_{\text{вв}} := 10^{-6}$

$dx_{\text{вв}} := dx \cdot k$ $a_{\text{вв}} := a \cdot k$ $KR := KR \cdot k$ $l_{\text{вв}} := l \cdot k$

3. Вычисление коэффициентов взаимной связи с оптимизацией алгоритма

3.1 Заполнение массива заготовок (возможных вариантов)

```

Mz := for i ∈ 0..Nx
      | z ← KRi,0
      | y ← KRi,1
      | z1 ← KR0,0
      | y1 ← KR0,1
      | d ← |y1 - y|
      | b ← |z - z1|
      | ZMi ← RΣ(1,z,z1,a,d,b,d)
      | ZM

```

$$Mz = \begin{pmatrix} 73.13 + 42.545i \\ -11.891 - 7.845i \\ 4.059 - 4.205i \\ -12.532 - 29.929i \\ 26.414 + 20.162i \\ -0.703 + 4.053i \\ 4.012 + 17.742i \\ -11.891 - 7.845i \\ -4.119 - 0.722i \end{pmatrix}$$

3.2 Заполнение полного массива с учетом блочной структуры

3.2.1 Пример заполнения блока B1

```

B1 := for i ∈ 0..Nx - 1
      | for j ∈ 0..Nx - 1
      |   MMi,j ← 0 + 0i
      | for i ∈ 0..Nx - 1
      |   | for j ∈ i..Nx - 1
      |   |   | MMi,j ← Mzj if i < 1
      |   |   | MMi,j ← Mz|i-j| otherwise
      |   | for j ∈ 0..i
      |   |   | MMi,j ← Mzj if i < 1
      |   |   | MMi,j ← Mz|i-j| otherwise
      | MM

```

$$B1 = \begin{pmatrix} 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 4.059 - 4.205i \\ -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i \\ 4.059 - 4.205i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i \end{pmatrix}$$

3.2.2 Пример заполнения блока B2

```

B2 := for i ∈ 0..Nx - 1
      | for j ∈ 0..Nx - 1
      |   MMi,j ← 0 + 0i
      | for i ∈ 0..Nx - 1
      |   | for j ∈ i..Nx - 1
      |   |   | MMi,j ← Mzj+Nx if i < 1
      |   |   | MMi,j ← Mz|i-j|+Nx otherwise
      |   | for j ∈ 0..i
      |   |   | MMi,j ← Mzj+Nx if i < 1
      |   |   | MMi,j ← Mz|i-j|+Nx otherwise
      | MM

```

$$B2 = \begin{pmatrix} -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -0.703 + 4.053i \\ 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i \\ -0.703 + 4.053i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i \end{pmatrix}$$

3.2.3 Пример заполнения блока B3

```

B3 := for i ∈ 0..Nx - 1
      | for j ∈ 0..Nx - 1
      |   MMi,j ← 0 + 0i
      | for i ∈ 0..Nx - 1
      |   | for j ∈ i..Nx - 1
      |   |   | MMi,j ← Mzj+Nx-2 if i < 1
      |   |   | MMi,j ← Mz|i-j|+Nx-2 otherwise
      |   | for j ∈ 0..i
      |   |   | MMi,j ← Mzj+Nx-2 if i < 1
      |   |   | MMi,j ← Mz|i-j|+Nx-2 otherwise
      | MM

```

$$B3 = \begin{pmatrix} 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i & -4.119 - 0.722i \\ -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i \\ -4.119 - 0.722i & -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i \end{pmatrix}$$

3.2.4 Пример заполнения матрицы в полном массиве из блоков

3.2.4.1 Первая строка

M1 := augment(B1,B2) M1 := augment(M1,B3)

3.2.4.2 Вторая строка

M2 := augment(B2,B1) M2 := augment(M2,B2)

3.2.4.3 Третья строка

M3 := augment(B3,B2) M3 := augment(M3,B1)

3.2.4.4 Полная матрица

MP := stack(M1,M2) MP := stack(MP,M3)

$$MP = \begin{pmatrix} 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 4.059 - 4.205i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -0.703 + 4.053i & 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i & -4.119 - 0.722i \\ -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i \\ 4.059 - 4.205i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -0.703 + 4.053i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & -4.119 - 0.722i & -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i \\ -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -0.703 + 4.053i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 4.059 - 4.205i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -0.703 + 4.053i \\ 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i \\ -0.703 + 4.053i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 4.059 - 4.205i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -0.703 + 4.053i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i \\ 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i & -4.119 - 0.722i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -0.703 + 4.053i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i & 4.059 - 4.205i \\ -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i & -11.891 - 7.845i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 26.414 + 20.162i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i & -11.891 - 7.845i \\ -4.119 - 0.722i & -11.891 - 7.845i & 4.012 + 17.742i & -0.703 + 4.053i & 26.414 + 20.162i & -12.532 - 29.929i & 4.059 - 4.205i & -11.891 - 7.845i & 73.13 + 42.545i \end{pmatrix}$$