

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Ростовский технологический институт сервиса и туризма (филиал)  
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования  
«ЮЖНО-РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ЭКОНОМИКИ И  
СЕРВИСА»

ЗВЕЗДИНА М.Ю., ШОКОВА Ю.А.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ  
АНАЛИТИЧЕСКИХ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

*Методическое пособие  
по выполнению практического задания*

Ростов-на-Дону – 2012г.

**УДК 621.396.677**

**Звездина М.Ю., Шокова Ю.А.** Исследование особенностей применения аналитических и численных методов при решении краевых задач электродинамики. Ростов-на-Дону: РТИСТ ЮРГУЭС, 2012. 39 с.

Методическое пособие предназначено для студентов, изучающих дисциплину «Электродинамика и распространение радиоволн». Помимо сведений о программе работы, в пособии приводятся краткие теоретические сведения о методах решения краевых задач электродинамики, приводится пример решения задачи о нахождении распределения плотности поверхностного тока на круговом металлическом цилиндре при падении на цилиндр плоской линейно поляризованной волны. Дается сравнение результатов, полученных при использовании строгих и численных методов. Наряду со сведениями теоретического характера приводятся описание порядка работы, требования к оформлению отчета, контрольные вопросы.

Пособие может быть рекомендовано для более углубленного изучения вопроса о выборе метода решения задач дифракции в электродинамике.

© Звездина М.Ю., Шокова Ю.А. 2012

## СОДЕРЖАНИЕ

1	Цель и содержание работы .....	4
2	Краткие сведения о решении краевых задач электродинамики .....	5
2.1	Обзор методов решения задачи о возбуждении поверхностного тока на металлическом цилиндре .....	5
2.2	Постановка задачи о нахождении плотности поверхностного электрического тока на круговом цилиндре...	8
2.3	Общее описание решения краевой задачи на основе метода Фурье .....	11
2.4	Решение задачи о нахождении распределения поверхностного тока в случае падения $E$ -поляризованной плоской волны.....	16
2.5	Решение задачи о нахождении распределения поверхностного тока в случае падения $H$ -поляризованной плоской волны.....	20
2.6	Выбор численного метода решения сформулированной краевой задачи .....	22
2.7	Решение краевой задачи о нахождении тока на основе метода интегральных уравнений .....	24
2.8	Применение метода коллокации для численного решения интегрального уравнения .....	31
2.9	Сравнение результатов, полученных при использовании аналитического и численного методов .....	35
3	Программа подготовки к работе .....	37
4	Описание порядка работы .....	37
5	Содержание отчета .....	38
6	Контрольные вопросы .....	38
	БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	39

## **1 Цель и содержание работы**

Привитие навыков выбора метода решения краевой задачи из совокупности известных в настоящий момент строгих и численных методов решения задач электродинамики на примере решения задачи о нахождении распределения плотности поверхностного тока, возбуждаемого при падении плоской линейно поляризованной волной на круговой металлический цилиндр.

### **Содержание работы**

1. Ознакомление с выводом расчетных соотношений для компонент вектора плотности поверхностного электрического тока, возбуждаемого при падении плоской линейно поляризованной волной на круговой металлический цилиндр при использовании метода собственных функций.
2. Ознакомление с выводом расчетных соотношений для компонент вектора плотности поверхностного электрического тока, возбуждаемого при падении плоской линейно поляризованной волной на круговой металлический цилиндр при использовании метода интегральных уравнений.
3. Особенности применения метода коллокации для решения интегрального уравнения.
4. Проведение сравнительного анализа полученных результатов решения дифракционной задачи.

## **2 Краткие сведения о решении краевых задач электродинамики**

### **2.1 Обзор методов решения задачи о возбуждении поверхностного тока на металлическом цилиндре**

2.1.1 Выполним обзор используемых для решения задач электродинамики методов на примере решения задачи дифракции плоской линейно поляризованной волны на круговой металлический цилиндр. Моделирование структуры поверхностного электрического тока, возбуждаемого при этом на круговом металлическом цилиндре, относится к дифракционным задачам электродинамики. Классический подход к решению дифракционных задач прикладной электродинамики основан на методах, позволяющих получить решение в замкнутом аналитическом виде [1-4]. До эры ЭВМ существовало определенное число идеализированных задач, решаемых классическими аналитическими методами или приближенными методами (метод возмущения, асимптотические методы, вариационные методы и др.), основанные на наличии того или иного малого параметра. В этом случае решение заключалось в точном или приближенном аналитическом представлении некоторых величин через известные функции. С развитием техники СВЧ происходит усложнение граничных поверхностей регулярных линий передачи, появляются более сложная элементная база и новые виды антенн. Кроме того, прогресс современной вычислительной техники дал новый толчок развитию ряда разделов математической физики и вычислительной математики. Для электродинамики, в частности, расширился набор задач, поддающихся расчету, и изменился подход к их решению. Наиболее важной тенденцией является все возрастающее значение вычислительных методов, опирающихся на использование ЭВМ. Это дает более широкие возможности, так как не ограничивается применением жестких идеализированных схем. Сведение задачи к интегральному уравнению или системе линейных алгебраических уравнений при наличии эффективных алгоритмов решения этих уравнений на ЭВМ часто более предпочтительно и дает более точные результаты, чем классические аналитические методы.

2.1.2 Из сказанного выше следует, что для решения дифракционных задач могут быть использованы либо аналитические, либо численные методы. Выбор того или иного метода определяется формой поверхности рассеивающего тела. В случае, когда поверхность совпадает с одной из координатных осей, возможно применение аналитических методов. Получаемое при этом решение выражается в замкнутой форме, т.е. в виде формулы, позволяющей моделировать структуру поля в произвольной точке [1]. Ценность этих методов состоит в том, что полученные с их помощью решения позволяют лучше понять принципы взаимодействия электромагнитного поля с объектами, а также приблизительно предсказать характер возмущенного поля для более сложных геометрий. Однако число поверхностей, для которых возможно по-

лучение аналитического решения, ограничено, например, плоскость – декартова система координат, круговой цилиндр, клин – цилиндрическая система координат, сфера, шар – сферическая система координат. Тела, для которых возможно получение аналитического решения, называются каноническими [1].

Для решения практических задач точные аналитические методы используются крайне редко. Ценность этих методов, однако, состоит в том, что полученные с их помощью решения позволяют лучше понять принципы взаимодействия электромагнитного поля с объектами, а также приблизительно предсказать характер возмущенного поля для более сложных геометрий. Кроме того, имеющие точное решение задачи являются эталонными, т.е. с их помощью можно оценить точность решений на основе приближенных методов.

2.1.3 Для рассмотрения общности и различий известных методов представим решение дифракционной задачи в виде совокупности решений [1]:

$$\vec{E}^N = \sum_{n=1}^N c_n \vec{E}_n, \quad \vec{H}^N = \sum_{n=1}^N c_n \vec{H}_n, \quad (1)$$

где  $c_n$  - неизвестные коэффициенты.

При таком записи решения различие методов состоит в требованиях, накладываемых на систему функций  $\{\vec{E}_n, \vec{H}_n\}$ :

- функции  $\{\vec{E}_n\}$  и  $\{\vec{H}_n\}$  связаны уравнениями Максвелла;
- функции  $\{\vec{E}_n\}$  и  $\{\vec{H}_n\}$  не связаны уравнениями Максвелла, но удовлетворяют требуемым граничным условиям и обладают некоторыми свойствами (например, полноты, а функции из данных систем являются коэффициентами Фурье).

Первому подходу соответствуют аналитические методы решения (например, метод собственных функций), второму – численные методы.

Традиционно численные методы разбиваются на два класса [1]:

- проекционные;
- дискретизационные.

Проекционные методы «проецируют» (распространяют) решение, лежащее в некотором бесконечномерном функциональном пространстве, на конечномерное подпространство, определяемое системой базисных (пробных) функций. Дискретизационные методы ищут решение либо на некотором множестве точек, выделенных в области, либо на некотором множестве подобластей. К проекционным методам относятся: метод моментов и его разновидности – метод Бубнова-Галеркина, метод наименьших квадратов, метод Рэлея-Ритца и др. К дискретизационным методам традиционно относят разностные методы: метод конечных разностей, метод сеток, метод конечных элементов и др.

Следует подчеркнуть, что некоторые методы имеют черты как проекционных, так и дискретизационных методов, например, метод коллокаций, метод частичных областей.

2.1.4 При выборе метода решения краевых задач особое внимание обращается на соотношение длины волны  $\lambda$  и характерного размера  $L$  тела. Различают три характерные области [1, 2]:

- квазистатическую (рэлеевскую) область, когда  $L / \lambda \ll 1$ ;
- резонансную область, когда  $L / \lambda \approx 1$ , а параметры среды могут быстро меняться на расстоянии, равном длине волны;
- квазиоптическую область, когда  $L / \lambda \gg 1$ , а параметры среды меняются мало на расстоянии, равно длине волны.

В квазистатической области решение уравнений Максвелла представляется в виде разложения векторов поля в ряд по степеням  $kL$ , т.е. по малому параметру задачи. Таким путем электродинамическая задача сводится к последовательному решению ряда электростатических и магнитостатических задач. Переход к статическим задачам дает упрощение за счет двух факторов: во-первых, скалярные задачи скалярные, а, во-вторых, получаемые при этом уравнения электростатики - уравнения Лапласа и Пуассона – проще уравнений Гельмгольца. Недостатком является тот факт, что в практических задачах далеко не всегда удастся аналитически решить уравнение Лапласа и приходится прибегать к численному решению.

Резонансная область наиболее сложна для исследования, поскольку здесь требуются строгие методы решения уравнений Максвелла. Для получения таких решений чаще всего используются два близких аналитических метода: метод разделения переменных (метод собственных функций) и метод интегральных преобразований. При использовании данных методов подбирается система координат, такая, чтобы граничные поверхности или поверхности равных параметров среды совпадали с координатными поверхностями. В выбранной системе координат отыскиваются решения однородного уравнения Гельмгольца. Эти решения при определенных условиях образуют полные ортогональные системы функций, по которым решение неоднородного уравнения может быть разложено либо в ряд (метод собственных функций), либо в интеграл (метод интегральных преобразований). Получаемое в аналитической форме полное решение задачи справедливо во всех трех характерных областях. Недостатком методов является то, что они применимы только при очень простой форме граничных поверхностей или поверхностей равных параметров среды.

Граничные задачи можно также свести к интегральным уравнениям. Интегральные уравнения можно составить для тел практически любой формы. Накладываются лишь слабые ограничения, требующие в определенном смысле гладкости поверхности. Интегральные уравнения позволяют рассмотреть вопросы существования решений граничных задач. Вместе с тем, используя хорошо разработанные методы численного решения интегральных уравнений, строятся алгоритмы решения некоторых классов граничных задач (преимущественно внешних).

Квазиоптика – наиболее многообещающий и развивающийся в настоящее время раздел электродинамики. Квазиоптические методы можно разделить на две группы: асимптотическое исследование точных решений, полученных методом собственных функций или интегральных преобразований, и построение эвристических методов с привлечение различных физических идей. Среди эвристических методов выделяют лучевые и волновые. Квазиоптические методы позволяют решать значительно более широкий круг задач, чем точные. Тенденция здесь такова, что квазиоптика все ближе и ближе подходит к резонансной области.

Поскольку в качестве исследуемого объекта выступает поверхностный электрический ток, возбуждаемый на несущей конструкции в виде кругового металлического цилиндра антенны СВЧ-диапазона, то поперечные размеры цилиндра сопоставимы с длиной волны. Следовательно, для моделирования структуры поля могут быть использованы либо прямые методы, например, метода разделения переменных, либо метод интегральных уравнений.

## **2.2 Постановка задачи о нахождении плотности поверхностного электрического тока на круговом цилиндре**

2.2.1 Постановка краевой задачи звучит следующим образом.

Пусть на бесконечный круговой цилиндр радиуса  $a$ , помещенного в свободное пространство, падает с направления, характеризуемого углами  $\theta_0 = 90^\circ, \varphi_0$ , плоская электромагнитная волна  $\{\vec{E}^{\text{пад}}, \vec{H}^{\text{пад}}\}$ .

На поверхности кругового металлического цилиндра выполняются граничные условия для идеально проводящей поверхности.

Требуется найти поверхностный электрический ток  $\vec{j}^{\text{э}}$ , возбуждаемый на круговом цилиндре данной электромагнитной волной.

2.2.2 Для формулировки решения учтем, что поверхностный электрический ток  $\vec{j}^{\text{э}}$ , возбуждаемый на круговом цилиндре, связан с магнитным полем падающей волны с помощью граничных условий [4, 5]:

$$\vec{j}^{\text{э}} = [\vec{H}, \vec{n}], \quad (2)$$

где  $\vec{n}$  - вектор внешней нормали к поверхности цилиндра;

$$\vec{H} = \vec{H}^{\text{пад}} + \vec{H}^{\text{рас}}, \quad (3)$$

$\vec{H}^{\text{рас}}$  - рассеянное (вторичное) поле.

Таким образом, электродинамическая задача сводится к определению рассеянного электромагнитного поля в дальней зоне в точке пространства, характеризуемой углами  $\theta = 90^\circ, \varphi$ .

При решении поставленной задачи целесообразно рассматривать два случая поляризации падающей волны относительно оси Oz:



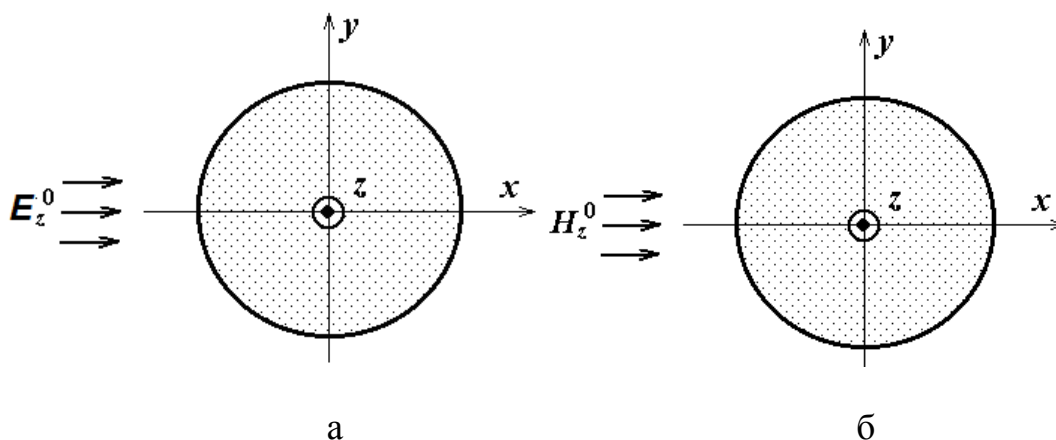


Рисунок 1 – Геометрия задачи

1) вектор  $\vec{E}$  параллелен оси  $Oz$  (рисунок 1,а);

2) вектор  $\vec{H}$  параллелен оси  $Oz$  (рисунок 1,б).

Общий случай произвольной поляризации падающей волны может быть получен суперпозицией данных типов полей.

2.2.3 Для получения решения введем систему цилиндрическую координат  $0\rho\varphi z$  таким образом, чтобы ось  $Oz$  совпадала с направляющей бесконечного кругового цилиндра. Поскольку цилиндр является осесимметричным телом, то можно полагать, что плоская волна приходит с направления  $\varphi_0 = 0^\circ$ . Кроме того, поскольку  $\theta_0 = 90^\circ$ , то задача может быть сведена к плоскому случаю. С учетом вышесказанного проекции векторов поля падающей волны будут иметь вид:

- для случая падения  $E$ -поляризованной волны:

$$E_z^{\text{пад}} = E_0 \exp(-ikr \cos \varphi), \quad H_z = 0, \quad (4a)$$

- для случая падения  $H$ -поляризованной волны:

$$H_z^{\text{пад}} = \frac{E_0}{W_0} \exp(-ikr \cos \varphi), \quad E_z = 0, \quad (4б)$$

где  $E_0$  - амплитуда напряженности электрического поля в падающей волне;

$W_0 = 120\pi \approx 377$  Ом – волновое сопротивление свободного пространства;

$k = 2\pi / \lambda$  - волновое число свободного пространства;

$\lambda$  - рабочая длина волны в свободном пространстве;

$i = \sqrt{-1}$  - мнимая единица.

Строгое решение дифракционной задачи сводится к решению уравнений Максвелла при заданных граничных условиях для составляющих электромагнитного поля на поверхности цилиндра и на бесконечности. В качест-

ве граничных условий выступает требование непрерывности касательных к поверхности цилиндра составляющих векторов результирующего электромагнитного поля на поверхности цилиндра. На бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ) вторичное (рассеянное) поле должно удовлетворять принципу излучения (условиям Зоммерфельда) [4]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u}{\partial r} + ik_0 u \right) = 0, \quad (5)$$

где  $u = E_\theta, E_\varphi, H_\theta, H_\varphi$ .

Рассеянное поле удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца, которое в цилиндрической системе координат имеет вид [4]:

- для случая падения  $E$ -поляризованной волны:

$$\frac{1}{r} \partial \left( \frac{r E_z^{pac}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z^{pac}}{\partial \varphi^2} + k^2 E_z^{pac} = 0. \quad (6a)$$

- для случая падения  $H$ -поляризованной волны:

$$\frac{1}{r} \partial \left( \frac{r H_z^{pac}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z^{pac}}{\partial \varphi^2} + k^2 H_z^{pac} = 0. \quad (6b)$$

Граничные условия для полного поля на поверхности определяются выражениями [4]:

- для случая падения  $E$ -поляризованной волны:

$$E_z^{пад} + E_z^{pac} = 0 \Big|_{r=a}. \quad (7a)$$

- для случая падения  $H$ -поляризованной волны:

$$\frac{\partial (H_z^{пад} + H_z^{pac})}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0. \quad (7b)$$

Таким образом, в общем случае решение задачи определения вторичного электромагнитного поля, возникающего в дальней зоне, формулируется в виде дифференциального уравнения второго порядка. Решение задачи будет осуществлять двумя способами:

- с использованием метода собственных функций (частный случай метода Фурье);

- с использованием метода интегральных уравнений и дальнейшей редукцией методом коллокации.

Такой подход обеспечит возможность сравнения точности и временных затрат при использовании аналитических методов и численных методов.

## 2.3 Общее описание решения краевой задачи на основе метода Фурье

2.3.1 Как известно, например, из [4], для решения краевых задач электродинамики разработаны и применяются различные методы, условно разделяемые на три группы:

- строгие;
- приближенные;
- численные.

К основным достоинствам решения, полученного с использованием строгих методов, является его аналитическая форма, справедливая при любом соотношении между размерами рассматриваемого объекта и длиной волны. Полученное при этом решение удовлетворяет всем требованиям теоремы единственности. Следует также отметить, что решая одну и ту же задачу другим строгим методом можно получить ее решение в другой форме. При этом это всего лишь другая форма записи того же решения, другое представление той же функции.

При построении строгого решения электродинамической задачи ее предварительно сводят либо к решению дифференциального уравнения в частных производных, либо к решению интегрального уравнения. Известно относительно небольшое число строгих методов решения краевых задач электродинамики. К ним, в частности, относятся [4]:

- метод Фурье;
- метод Гринберга;
- метод интегральных преобразований;
- метод Винера-Хопфа-Фока;
- метод разветвленных решений;
- метод, основанный на построении функции Грина.

Существуют и другие строгие методы.

2.3.2 Поскольку метод собственных функций относится к методу Фурье, то остановимся на более подробном его рассмотрении.

Метод Фурье основан на возможности применения к задачам математической физики принципа суперпозиции [4]. В соответствии с этим принципом любая линейная комбинация решений однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных также является решением этого уравнения.

Пусть, например, функции  $u = u_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  являются решениями линейного уравнения в частных производных

$$L(u) = 0. \quad (8)$$

Тогда и сумма

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (9)$$

также будет решением этого уравнения, если, конечно, ряд (9) сходится таким образом, что возможно перестановка операторов  $L$  и  $\Sigma$ .

Аналогично, если частные решения  $u = u_\nu$  уравнения (8) непрерывно зависят от некоторого параметра  $\nu$ , изменяющегося в интервале  $(\chi, \tau)$ , то при выполнении соответствующих очевидных условий интеграл

$$I = \int_{\chi}^{\tau} u_\nu d\nu \quad (10)$$

также будет являться решением уравнения (8).

Ограничимся изложением схемы метода Фурье для задач, которые могут быть сведены к решению дифференциального уравнения

$$\frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x) u \right\} + M_y u = 0, \quad 0 < x < b, \quad c < y < d, \quad (11)$$

где  $M_y$  - дифференциальный оператор вида

$$M_y = A \frac{\partial^2}{\partial y^2} + B \frac{\partial}{\partial y} + C, \quad (12)$$

$A, B, C$  - заданные постоянные;

$p(x)$  и  $q(x)$  - непрерывные положительные функции, первая из которых имеет непрерывную производную, а вторая – заданная непрерывная функция.

Уравнение (11) не представляет собой наиболее общего уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными, которое допускает разделение переменных, однако оно включает, как частные случаи, наиболее часто встречающиеся уравнения электродинамики.

2.3.3 Для решения уравнения (11) предположим вначале, как предложено в [4], что интервал  $(a, b)$  конечен, и поведение рассматриваемых функций на концах интервала таково, что каждое из отношений  $\frac{p'(x)}{p(x)}$ ,  $\frac{q(x)}{p(x)}$  и  $\frac{r(x)}{p(x)}$  стремится к конечному пределу, когда  $x \rightarrow a$  и  $y \rightarrow b$ .

Метод Фурье применяется для решения однородных задач математической физики. В связи с этим искомая функция  $u$  должна удовлетворять уравнению (11) и однородным краевым условиям на концах промежутка изменения одной из переменных. Будем считать, как и в [4], что однородные краевые условия выполняются на концах промежутка  $(a, b)$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \alpha_a \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_a u \right) \Big|_{x=a} &= 0 \\ \left( \alpha_b \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_b u \right) \Big|_{x=b} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где  $\alpha_a, \alpha_b, \beta_a, \beta_b$  - постоянные, часть из которых может равняться нулю.

В частности, если  $\alpha_a = \alpha_b = 0$  и  $\beta_a = \beta_b = 1$ , то из (13) следуют однородные условия первого вида

$$u|_{x=a} = u|_{x=b} = 0, \quad (14a)$$

а при  $\alpha_a = \alpha_b = 1$  и  $\beta_a = \beta_b = 0$  - однородные условия второго рода:

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=a} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=b} = 0. \quad (14б)$$

Кроме краевых условий (13) функция  $u$  должна также удовлетворять неоднородным условиям, относящимся к переменной  $y$ . Вид этих условий связан с постоянной  $A$ , определяющей принадлежность уравнения (11) к эллиптическому, гиперболическому или параболическому типу.

При  $A > 0$  (эллиптический тип) с достаточной для приложений общностью можно считать, что условия (13) имеют вид [4]:

$$\left. \begin{aligned} \left( \gamma_c \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_c u \right) \Big|_{y=c} &= g_c(x) \\ \left( \gamma_d \frac{\partial u}{\partial x} + \delta_d u \right) \Big|_{y=d} &= g_d(x) \end{aligned} \right\}, \quad (15)$$

где  $\gamma_c, \gamma_d, \delta_c, \delta_d$  - постоянные, часть из которых может равняться нулю;

$g_c(x), g_d(x)$  - функции, заданные в интервале  $(a, b)$ .

Случаи  $A < 0$  (гиперболический тип) и  $A = 0$  (параболический тип) соответствуют задачам математической физики, в которых переменная  $y$  играет роль времени с интервалом изменения  $(c, \infty)$ . Условия, относящиеся к значению  $y = c$ , имеют форму начальных условий:

$$u|_{y=c} = f(x) \quad (16a)$$

или

$$u|_{y=c} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=c} = g(x), \quad (16б)$$

где  $f(x), g(x)$  - заданные функции.

Частное решение уравнения (11) ищут в виде [4]:

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (11) и деля результат на произведение  $X(x)Y(y)$ , получаем

$$\frac{1}{r(x)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} p(x) \frac{\partial u}{\partial x} - q(x)u \right\} = - \frac{M_y u}{Y(y)}. \quad (18)$$

Переменные  $x$  и  $y$  являются независимыми, следовательно, обе части уравнения (18) являются независимыми функциями. Их равенство возможно только в том случае, когда они равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через  $v^2$ , приходим к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$(p(x)X'(x)) + (v^2 r(x) - q(x))X(x) = 0, \quad (19a)$$

$$M_y Y(y) - v^2 Y(y) = 0. \quad (19b)$$

Из однородных краевых условий (13) для функции  $u(x, y)$  следуют аналогичные условия для функции  $X(x)$  [4]:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_a X'(a) + \beta_a X(a) &= 0 \\ \alpha_b X'(b) + \beta_b X(b) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

2.3.4 Задачу определения решения уравнения (19a), удовлетворяющих однородным краевым условиям (20), называют краевой задачей Штурма-Луивилля [4]. При произвольном  $v^2$  эта задача не имеет решения за исключением тривиального  $X(x) \equiv 0$ . Значения  $v^2$ , при котором существует нетривиальное решение задачи Штурма-Луивилля, называют собственным значением, или собственным числом, а соответствующее решение – собственной функцией. Совокупность собственных значений образует спектр данной задачи.

При сделанных выше предположениях о функциях  $r(x)$ ,  $p(x)$  и  $q(x)$  в интервале  $(a, b)$  можно показать, что спектр задачи будет дискретным, состоящим из счетного множества действительных собственных значений  $v = v_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), каждому из которых соответствует собственная функция  $X(x) = X_n(x)$ , определенная с точностью до произвольного постоянного множителя.

Собственные функции  $X_n(x)$  ортогональны на промежутке  $(a, b)$  с весом  $r(x)$  [4]:

$$\int_a^b r(x) X_n(x) X_m(x) dx = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (21)$$

Любую кусочно-гладкую в интервале  $(a, b)$  функцию  $f(x)$  можно разложить в ряд по собственным функциям  $X_n(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x), \quad a < x < b, \quad (22)$$

где

$$f_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) X_n(x) dx}{\int_a^b r(x) X_n^2(x) dx}. \quad (23)$$

Собственные числа и собственные функции легко определяются, если при произвольном  $v$  известна система линейно независимых решений уравнения (19a). Подставляя общее решение этого уравнения в краевые условия (20), приходят к однородной линейной системе для постоянных, а приравни-

вая нулю определитель системы, получают трансцендентное уравнение для определения допустимых значений  $\nu$ .

Второй множитель  $Y_n(y)$  находится после определения собственных функций и собственных чисел задачи из уравнения (19б), в котором необходимо положить  $\nu = \nu_n$ .

При  $A \neq 0$  общее решение этого уравнения может быть записано в форме [4]:

$$Y_n(y) = c_n^{(1)} Y_n^{(1)}(y) + c_n^{(2)} Y_n^{(2)}(y), \quad (242)$$

где  $c_n^{(1)}$  и  $c_n^{(2)}$  - произвольные постоянные;

$Y_n^{(1)}(y)$  и  $Y_n^{(2)}(y)$  - линейно независимые решения уравнения (19б).

При  $A = 0$  оператор  $M_y$  является дифференциальным оператором первого порядка, и решение уравнения (19б) записывается в форме [4]:

$$Y(y) = c_n Y_n(y), \quad (25)$$

где  $c_n$  - произвольная постоянная;

$Y_n(y)$  - функция, удовлетворяющая уравнению (19б) при  $A = 0$ .

Таким образом, частные решения уравнения (11) определяются выражением [4]:

$$u_n(x, y) = X_n(x) Y_n(y) = (c_n^{(1)} Y_n^{(1)}(y) + c_n^{(2)} Y_n^{(2)}(y)) X_n(x). \quad (26)$$

Решение при этом ищется в виде [7]:

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y). \quad (27)$$

Постоянные  $c_n^{(1)}$  и  $c_n^{(2)}$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) вычисляются после подстановки (27) в краевые условия (13) и разложения функций  $g_c(x)$  и  $g_d(x)$  в ряды вида (22) по собственным функциям  $X_n(x)$ .

2.3.5 Описанная методика практически без изменений может быть распространена на случай, когда искомая функция должна удовлетворять условиям (16). Единственное отличие состоит в том, что в данном случае одному собственному значению могут соответствовать две линейно независимые собственные функции.

Более сложными для применения метода Фурье являются случаи, когда интервал  $(a, b)$  бесконечен, или какое-либо из отношений  $\frac{p'(x)}{p(x)}$ ,  $\frac{q(x)}{p(x)}$  и

$\frac{r(x)}{p(x)}$  стремится к бесконечности при приближении к одному или к обоим

концам интервала изменения переменной  $x$  (случай одного или двух сингулярных концов). В этих случаях краевое условие, относящееся к сингулярному концу, или к концу  $x = b = \infty$ , как правило, нельзя задать в форме (16). Обычно его можно заменить требованием ограниченности решения при приближении к сингулярному концу. При решении внешних задач электродинамики в предположении, что рассматриваемая часть пространства заполнена

средой без потерь, условие на конце  $x = b = \infty$  обычно формулируют в виде условия излучения Зоммерфельда (5). Существенное отличие рассмотренных ранее случаев состоит в том, что спектр собственных значений может быть как дискретным, так и непрерывным, в зависимости от структуры уравнения и характера налагаемых граничных условий. При непрерывном спектре меняется сам характер решения, которое в этом случае строится путем интегрирования частных производных по параметру  $\nu$ , а для определения неизвестных множителей, входящих под знак интеграла, используется аппарат интегральных разложений, заменяющих теорию рядов по собственным функциям [4].

2.3.6 Таким образом, для решения краевых задач электродинамики методом Фурье необходимо выполнение определенных требований. Для внешних и внутренних задач эти требования имеют некоторые отличия.

Для внутренних задач необходимо, чтобы рассматриваемая область была ограничена координатными поверхностями системы координат, допускающей разделение переменных в уравнении Гельмгольца (одной или двумя координатными поверхностями в случае двумерной области и одной, двумя или тремя в случае трехмерной области).

Для внешних задач граница рассматриваемой области, как правило, должна полностью совпадать с какой-либо координатной поверхностью системы координат, допускающей разделение переменных в уравнении Гельмгольца. Исключение составляют внешние области, которые могут быть получены путем предельных переходов из некоторых внутренних областей. Это требование существенно сужает класс внешних задач по сравнению с классом внутренних задач, для которых может быть получено строгое решение методом Фурье. Метод Фурье разработан для решения однородных задач математической физики, которые сводятся к интегрированию однородного дифференциального уравнения при однородных краевых условиях одной переменной.

## **2.4 Решение задачи нахождения распределения поверхностного тока в случае падения $E$ -поляризованной плоской волны**

2.4.1 При падении на металлический круговой цилиндр плоской электромагнитной волны  $E$ -поляризации в падающем поле имеется только одна продольная составляющая поля, определяемая соотношением (4а). Под воздействием первичного поля на цилиндре наводятся продольные поверхностные электрические токи, которые создают вторичное  $E$ -поляризованное электромагнитное поле  $\{\vec{E}^{\text{рас}}, \vec{H}^{\text{рас}}\}$ . При этом продольная компонента вторичного поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца (6а). На поверхности цилиндра в силу граничных условий (7а) продольная составляющая полного электрического поля обращается в нуль. На бесконечности должно выполняться условие излучения (5), которое в данном случае эквивалентно требованию,



чтобы при  $r \rightarrow \infty$  во вторичном поле были только расходящиеся от цилиндра электромагнитные волны, и не было волн, идущих от бесконечности к рассматриваемому цилиндру.

Кроме того, из физических соображений очевидно, что искомая функция  $E_z(r, \varphi)$  должна быть периодической с периодом  $2\pi$  и четной относительно направления  $\varphi = \varphi_0$ , т.е. должны выполняться соотношения [4]:

$$E_z(r, \varphi + 2\pi) = E_z(r, \varphi), \quad (28a) \quad E_z(r, \varphi - \varphi_0) = E_z(r, \varphi_0 - \varphi). \quad (28b)$$

2.4.2 В соответствии с схемой решения задачи методом Фурье разделяем переменные в уравнении (6a). Полагая

$$E_z^{pac}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad (29)$$

Получаем из (6a) два уравнения в обыкновенных производных:

$$\frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R(r)}{\partial r} + \left( k^2 - \frac{v^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad (30a)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} + v^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad (30b)$$

где  $v$  – постоянная разделения.

Задача Штурма-Луивилля в данном случае состоит в нахождении нетривиального решения уравнения (30b), удовлетворяющего условиям (28). Записывая решение уравнения (30b), замечаем, что условие периодичности (28a) может быть выполнено только при  $v = n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , т.е. задача имеет дискретный спектр. Значения  $n = -1, -2, \dots$  не дают линейно независимых функций и могут не учитываться. Требуя, чтобы полученное решение уравнения (30b) удовлетворяло условию четности (28b), находим собственные функции задачи [4]:

$$\Phi = \Phi(\varphi) = A_n \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (31)$$

где  $A_n$  – произвольные постоянные.

Поскольку переменная  $a < r < \infty$ , то решение уравнения (30a) удобно представить в виде [6, 7]:

$$R(r) = B_n H_n^{(1)}(kr) + C_n H_n^{(2)}(kr), \quad (32)$$

где  $B_n$  и  $C_n$  – произвольные постоянные;

$H_n^{(1)}(\cdot)$  и  $H_n^{(2)}(\cdot)$  – соответственно функции Ганкеля  $n$  – го порядка первого и второго рода.

Для выбора решения используем условие излучения (5). В соответствии с данным условием искомое поле должно иметь характер волны, распространяющейся в бесконечность по радиальным направлениям. Из рассмотрения асимптотических выражений для функций Ганкеля [6]:

$$H_n^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[ i \left( z - \frac{2n+1}{4} \pi \right) \right], \quad (33a)$$

$$H_n^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp \left[ -i \left( z - \frac{2n+1}{4} \pi \right) \right], \quad (33b)$$

справедливых при больших значениях аргументов  $|z| \gg 1$ ;  $|z| \gg n$ , следует, что слагаемое  $C_n H_n^{(2)}(kr)$  из (33б) при  $kr \rightarrow \infty$  соответствует волне, распространяющейся от источника (в данном случае цилиндра) на бесконечность, т.е. удовлетворяет условию излучения. Следовательно,

$$R(r) = C_n H_n^{(2)}(kr), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (34)$$

Перемножая выражения (31) и (32), находим частные решения уравнения (6а):

$$E_z = E_z^{(n)} = D_n H_n^{(2)}(kr) \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad (35)$$

где  $D_n = A_n C_n$  - произвольная постоянная.

Выражение (35) удовлетворяет дифференциальному уравнению (6а), условию излучения (5), а также условиям (28). Осталось удовлетворить его граничным условиям (7а). Для этого в соответствии со схемой решения задачи методом Фурье представим искомую функцию в виде суперпозиции всех частных решений [4]:

$$E_z(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} E_z^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n D_n H_n^{(2)}(kr) \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad (36)$$

где  $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}$  - числа Неймана.

Падающее поле (6а) с использованием известного разложения [6] может быть представлено в виде:

$$E_z^{\text{пад}} = E_0 \exp(ika \cos \varphi) = E_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(ka) \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad (37)$$

где  $J_n(\cdot)$  - функция Бесселя  $n$ -го порядка.

С учетом соотношения (37) коэффициенты  $D_n$  могут быть представлены в виде:

$$D_n = -E_0 (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)}. \quad (38)$$

С учетом вида коэффициента разложения  $D_m$  продольная компонента  $E_z$  вторичного поля из (6а) может быть записана в виде:

$$E_z = -E_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{J_n(ka) \cos(n(\varphi - \varphi_0))}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr). \quad (39)$$

Решение задачи в форме (39) справедливо при любых соотношениях между радиусом цилиндра  $a$  и длиной волны  $\lambda$ . Однако при  $a \gg \lambda$  ряд в (39) сходится крайне медленно. Поэтому для получения численных результатов в случае  $a \gg \lambda$  на основе решения (39) его необходимо предварительно преобразовать к виду, удобному для расчетов.

2.4.3 Для нахождения закона распределения тока, возбуждаемого на поверхности цилиндра полем плоской волны, используем соотношение (3), описы-

вающие граничные условия на поверхности цилиндра. Для нахождения компонент вектора напряженности магнитного поля используем связь между продольными и поперечными компонентами гармонического поля через первое уравнение Максвелла [7]:

$$\text{rot } \vec{H} = \sigma \vec{E} - i\omega\epsilon \vec{E}. \quad (40)$$

Поскольку в свободном пространстве, окружающем цилиндр,  $\sigma = 0$ , а  $\omega\epsilon = \omega\sqrt{\epsilon\mu} \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\mu}} = \frac{k}{W_0}$ , то соотношение (40) можно преобразовать к виду:

$$\text{rot } \vec{H} = -\frac{ik}{W_0} \vec{E}. \quad (41)$$

Выше было показано, что в полном поле присутствует только продольная компонента вектора напряженности электрического поля, т.е.  $\vec{E} = \{0; 0; E_z\}$ . Следовательно, раскладывая представление ротора, получаем выражения для поперечных составляющих магнитного поля:

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{\rho} & \vec{\varphi} & \vec{z} \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & E_z \end{vmatrix} = \vec{\rho} \frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \vec{\varphi} \frac{\partial E_z}{\partial\rho}. \quad (42)$$

Таким образом, вектор напряженности магнитного поля имеет две отличные от нуля компоненты поля:  $\rho$  – и  $\varphi$  – компоненту. С учетом этого, можно записать выражение (3) через скалярные компоненты поля:

$$\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{\rho} & \vec{\varphi} & \vec{z} \\ H_\rho & H_\varphi & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{z} H_\varphi. \quad (43)$$

Анализ соотношения (43) показывает, что возбуждаемый плоской  $E$ -поляризованной электромагнитной волной на поверхности идеально проводящего цилиндра электрический ток имеет только одну, отличную от нуля компоненту – продольную, т.е.  $\vec{j} = \{0, 0, j_z\}$ , связанную с  $\varphi$  – компонентой магнитного поля. Следовательно, для нахождения поверхностного тока необходимо найти  $\varphi$  – компоненты магнитного поля. С этой целью воспользуемся соотношением (42). В результате получаем:

$$H_\varphi = i \frac{k}{W_0} \frac{\partial E_z}{\partial r} \quad (44)$$

или после подстановки (39) получаем:

$$H_\varphi^{\text{рас}} = \frac{iE_0}{W_0} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n \frac{J_n(ka) \cos(n(\varphi - \varphi_0))}{H_n^{(2)}(ka)} \frac{\partial H_n^{(2)}(kr)}{\partial kr}. \quad (45)$$

Выражение для падающего поля будет определяться формулой:

$$H_\varphi^{\text{пад}} = i \frac{E_0}{W_0} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \epsilon_n \frac{\partial J_n(kr)}{\partial kr} \cos(n(\varphi - \varphi_0)). \quad (46)$$

В соотношениях (45) и (46) учтено, что дифференцирование будет осуществляться по переменной  $kr$ , а не  $r$ , вследствие чего волновое число  $k$  было внесено под знак производной. Далее записывая с учетом выражений (45) и (46) соотношение для полного поля, получаем следующую формулу для нахождения вектора плотности поверхностного тока:

$$\vec{j} = \vec{z} \frac{E_0}{W_0} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \cos(n(\varphi - \varphi_0)) \left( J'_n(ka) - \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_m^{(2)'}(ka) \right). \quad (47)$$

Преобразуем полученное соотношение, учитывая определение вронскиана [9]:

$$J'_n(ka) H_n^{(2)}(ka) - J_n(ka) H_n^{(2)'}(ka) = \frac{2}{i\pi ka}. \quad (48)$$

В результате получаем:

$$j_z = -\frac{2E_0}{W_0 \pi ka} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{\cos(n(\varphi - \varphi_0))}{H_n^{(2)}(ka)}. \quad (49)$$

Учитывая осесимметричность цилиндра, можно положить, что  $\varphi_0 = 0$ , вследствие этого выражение (49) можно преобразовать к виду:

$$j_z = -\frac{2E_0}{W_0 \pi ka} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{\cos(n\varphi)}{H_n^{(2)}(ka)}. \quad (50)$$

Учитывая, что при  $a \gg \lambda$  ряд в (50) сходится крайне медленно, поскольку данным свойством обладает исходное выражение для продольной составляющей электрического поля, то суммирование в формуле (50) при численном использовании проводится до значений  $n$ , близких к величине  $2ka$ .

Таким образом, в данном подразделе получены соотношения, позволяющие определить вектор напряженности электрического тока, возбуждаемого плоской  $E$ -поляризованной электромагнитной волной на поверхности идеально проводящего кругового цилиндра.

## 2.5 Решение задачи нахождения распределения поверхностного тока в случае падения $H$ -поляризованной плоской волны

2.5.1 Рассмотрим второй случай поляризации падающей на круговой металлический цилиндр плоской электромагнитной волны. В этом случае в падающем поле имеется только одна продольная составляющая магнитного поля, определяемая соотношением (4б). Под воздействием первичного поля на цилиндре наводятся продольные поверхностные электрические токи, которые создают вторичное  $H$ -поляризованное электромагнитное поле  $\{\vec{E}^{\text{рас}}, \vec{H}^{\text{рас}}\}$ . При этом продольная компонента вторичного поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца (6б). На поверхности цилиндра в силу граничных условий (7б) в нуль обращается производная продольной составляющей полного магнитного поля. На бесконечности также должно выполняться условие излучения (5), имеющее тот же смысл, что и для случая  $E$ -

поляризованной волны. Соотношения (28) могут быть применены и для продольной компоненты магнитного поля, т.е.

$$H_z(r, \varphi + 2\pi) = H_z(r, \varphi), \quad (51a) \quad H_z(r, \varphi - \varphi_0) = H_z(r, \varphi_0 - \varphi). \quad (51b)$$

2.5.2 Применим тот же подход, что и при нахождении компонент поля для случая падения волны  $E$  поляризации. Учитывая отличия в записи граничных условий, неизвестные коэффициенты  $D_n = A_n C_n$  будут иметь вид:

$$D_n = -H_0 (-i)^n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (52)$$

В итоге можно записать выражение для продольной компоненты магнитного поля  $H_z$  вторичного поля из (6б):

$$H_z = H_z^{(n)} = 2H_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^{n+1} \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} H_m^{(2)}(kr) \cos(n(\varphi - \varphi_0)). \quad (53)$$

Решение задачи в форме (53) также справедливо при любых соотношении между радиусом цилиндра  $a$  и длиной волны  $\lambda$ . Однако при  $a \gg \lambda$  ряд в (53) сходится крайне медленно.

2.5.3 С использованием соотношения (2), описывающего граничные условия на поверхности цилиндра, запишем его через скалярные компоненты магнитного поля. По условию  $\vec{H} = \{0, 0, H_z\}$ , следовательно, можно записать:

$$\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{\rho} & \vec{\varphi} & \vec{z} \\ 0 & 0 & H_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{\varphi} H_z. \quad (54)$$

Анализ соотношения (54) показывает, что возбуждаемый плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волной на поверхности идеально проводящего цилиндра электрический ток имеет только одну, отличную от нуля компоненту –  $\varphi$  – компоненту, т.е.  $\vec{j} = \{0, j_\varphi, 0\}$ , связанную с  $z$  – компонентой магнитного поля. Подставляя в соотношение (54) выражения (53) и выражение, определяющее продольную компоненту падающего магнитного поля в виде

$$H_z^{\text{пад}} = H_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n J_n(kr) \cos(n(\varphi - \varphi_0)), \quad (55)$$

можно записать:

$$\vec{j} = \vec{\varphi} H_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \cos(n(\varphi - \varphi_0)) \left( J'_n(ka) - \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)'}(ka)} H_m^{(2)'}(ka) \right). \quad (56)$$

Преобразуя, как ранее для случая  $E$ -поляризованной волны полученное соотношение с учетом определения вронскиана, а также осесимметричность кругового цилиндра, получаем:

$$j_\varphi = i \frac{2H_0}{\pi ka} \sum_{n=0}^{\infty} i^n \varepsilon_n \frac{\cos(n\varphi)}{H_n^{(2)'}(ka)}. \quad (57)$$

Соотношение (57), как и соотношение (50) также крайне медленно сходится при  $a \gg \lambda$ . Вследствие этого суммирование в формуле (57) при численном использовании проводится до значений  $n$ , близких к величине  $2ka$ .

Таким образом, в данном подразделе получены соотношения, позволяющие определить вектор напряженности электрического тока, возбуждаемого плоской  $H$ -поляризованной электромагнитной волной на поверхности идеально проводящего кругового цилиндра.

## **2.6 Выбор численного метода решения сформулированной краевой задачи**

2.6.1 Для выполнения сравнения результатов решения краевой задачи электродинамики аналитическими и численными методами рассмотрим подробно численные методы решения дифракционных задач. Схема из [4], иллюстрирующая наиболее часто применяемые подходы к численному решению задач электродинамики, приведена на рисунке 2. На основе анализа данного рисунка осуществим выбор метода решения задачи.

Из анализа следует, что все подходы к численному решению задач электродинамики условно можно разделить на два больших класса:

- использующиеся для монохроматического поля;
- используемые для произвольной зависимости искомых полей от времени.

Поскольку в области радиотехники для связи используются монохроматические электромагнитные поля, то рассмотрим более подробно данную ветку. В свою очередь методы для монохроматических полей разбиваются на две группы:

- методы частичных областей, получившие наибольшее распространение для решения внутренних задач электродинамики;
- методы определения полей во всей области.

В соответствии с формулировкой задачи дифракции исследуемая задача о нахождении поверхностного тока, возбуждаемого на круговом цилиндре плоской линейно поляризованной волной, относится к методам определения полей во всей области. Указанные методы, как следует из [7], основаны на определении полей сразу во всей (полной) пространственной области. Один из возможных из возможных подходов состоит в определении самих электромагнитных полей в этой области (правая ветка). Другой подход (левая ветка) заключается в сведении задачи к нахождению распределения некоторой совокупности источников, поле каждого из которых удовлетворяет уравнению Гельмгольца (функция Грина). Распределение таких источников ищется из условия удовлетворения граничным условиям. Источники могут быть расположены на некоторой поверхности или контуре. При этом по-



Рисунок 2 – Схема классификации методов численного решения задач электродинамики [4]

нижается количество неизвестных, что дает значительные выгоды при численном решении. Указанное преимущество позволяет выбрать для моделирования структуры поля именно данный подход численного решения дифракционной задачи.

Поскольку в качестве конечного параметра, распределение которого необходимо проиллюстрировать, рассматривается в задании на дипломное проектирование плотность поверхностного тока, то целесообразно остановиться на применении метода интегральных уравнений, в котором в качестве неизвестной функции рассматривается распределение плотности токов.



## 2.7 Решения краевой задачи о нахождении тока на основе метода интегральных уравнений

2.7.1 Интегральными уравнениями называют функциональные уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла [4]. Интегральное уравнение называется линейным, если неизвестная функция входит в него линейно [4]. В этом случае интегральное уравнение может быть записано в виде:

$$f(r) + \lambda \int_a^b f(\tau) K(r, \tau) d\tau = u(r), \quad (58)$$

где  $f(r)$  - искомая функция;

$K(r, \tau)$  - ядро интегрального уравнения;

$\lambda$  - некоторый параметр;

$u(r)$  - свободный член.

Уравнение (58) называется также уравнением 2-го рода. Если же вне-интегральный член  $f(r)$  отсутствует, то уравнение называется интегральным уравнением 1-го рода [4].

Далее классификация интегральных уравнений идет в зависимости от выполнения условий [4]:

$$\int_a^b \int_a^b |K(r, \tau)|^2 dr d\tau < \infty, \quad \int_a^b |u(r)|^2 dr < \infty. \quad (59)$$

Если данные условия выполняются, то уравнения относятся к классу уравнений Фредгольма, если нет – то они могут относиться к сингулярным или гиперсингулярным уравнениям [4].

В рассматриваемой задаче первое неравенство эквивалентно требованию ограничения переносимой волной мощности, а второе – условию ограничения мощности излучения источника. Следовательно, формулируемые интегральные уравнения должны относиться к уравнениям Фредгольма.

2.7.2 Сформулируем интегральное уравнение для решения задачи дифракции на круглом металлическом цилиндре при падении плоской электромагнитной волны, имеющей линейную поляризацию. Для этого воспользуемся основными положениями теории построения интегральных уравнений для рассматриваемых тел, приведенными в [8]. В данной работе, в частности, приведен вывод интегральных уравнений для частных случаев падения волн линейной поляризации на идеально проводящее металлическое тело: в работе случай  $p$ -поляризации соответствует падению  $E$ -поляризованной волны, а случай  $s$ -поляризации –  $H$ -поляризованной волны. Геометрия задачи показана на рисунке 3.

В силу граничных условий (6) и условий излучения (5) в области внутри поверхности  $S$  поле отсутствует, даже если она вся не заполнена идеально проводящим материалом. Таким образом, в случае  $E$ -поляризации искомая функция  $v$  при переходе через поверхность  $S$  является непрерывной, а производная по нормали  $\partial v / \partial n$  испытывает разрыв. Обозначим данный раз-

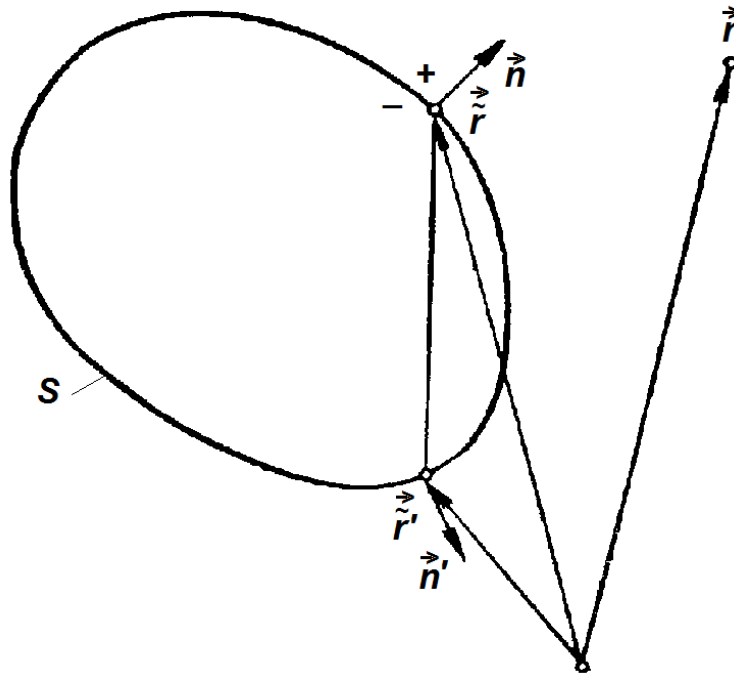


Рисунок 3 – Геометрия задачи для формулировки интегрального уравнения [8]

рыв через  $\psi$ . Следовательно,  $\psi = (\partial v / \partial n)_+$ , а  $(\partial v / \partial n)_-$ . Для случая второй поляризации обозначим разрыв искомой функции через  $\varphi = v_+$ .

С использованием принципа Гюйгенса можно записать [8]:

- для  $E$ -поляризации:

$$v(r) = v_0(r) - \oint_S \psi(\vec{r}') G(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}', \quad (59a)$$

- для  $H$ -поляризации:

$$v(r) = v_0(r) + \oint_S \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r}'. \quad (59b)$$

С точки зрения электродинамики величины  $\psi$  и  $\varphi$  имеют смысл поверхностных электрических токов.

Применяя условия  $(\partial v / \partial n)_- = 0$  и  $(\partial v / \partial n)_+ = \psi$  к уравнению (9a), можно записать уравнение Фредгольма 2-го рода для случая  $E$ -поляризации источника в виде [8]:

$$\frac{1}{2} \psi(\vec{r}') + \oint_S \psi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} G(\vec{r}' - \vec{r}') d\vec{r}' = \frac{\partial v_0(\vec{r}')}{\partial n}. \quad (60a)$$

В случае  $H$ -поляризации волны используются условия  $v_- = 0$  и  $v_+ = v$ . В результате интегральное уравнение принимает вид [8]:

$$\frac{1}{2} \varphi(\vec{r}') - \oint_S \varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} G(\vec{r}' - \vec{r}') d\vec{r}' = v_0(\vec{r}'). \quad (60b)$$

2.7.3 Для представления полей, описываемых соотношениями (3) и контуром, описываемым уравнением окружности, уравнения (60) могут быть представлены в виде [8]:

- для  $E$ -поляризованной волны:

$$v_{\parallel}(r, \theta) = \exp(-ikr \cos \theta) - \frac{ia}{4} \int_0^{2\pi} \psi_{\parallel}(\theta') H_0^{(1)}(kR) d\theta', \quad (61a)$$

- для  $H$ -поляризованной волны:

$$v_{\perp}(r, \theta) = \exp(-ikr \cos \theta) + \frac{ia}{4} \int_0^{2\pi} \psi_{\perp}(\theta') \frac{\partial}{\partial a} H_0^{(1)}(kR) d\theta', \quad (61b)$$

где  $H_0^{(1)}(\cdot)$  - функция Ганкеля нулевого порядка 1-го рода;

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta - \theta')}. \quad (62)$$

Получаемая при этом частном случае контура тела геометрия приведена на рисунке .4.

Преобразуем уравнения (61), учитывая, что

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = 2a \left| \sin \left( \frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right|, \quad (63a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} H_0^{(1)}(kR) &= k \frac{\partial}{\partial ka} H_0^{(1)}(2ka \left| \sin \left( \frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right|) = \\ &= -k \left| \sin \left( \frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right| H_1^{(1)}(2ka \left| \sin \left( \frac{\theta - \theta'}{2} \right) \right|), \end{aligned} \quad (63b)$$

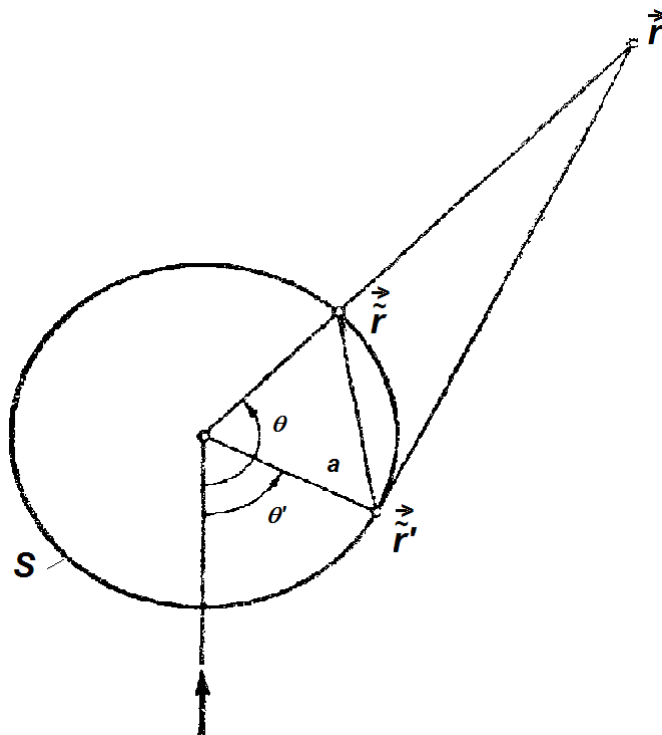


Рисунок 4 – Геометрия задачи для решения задачи о нахождении токов на цилиндре [8]

где  $H_1^{(1)}(\cdot)$  - функция Ганкеля первого порядка 1-го рода.

В результате уравнения (61) принимают вид:

- для  $E$ -поляризованной волны:

$$\psi_{\parallel}(\theta) - \frac{ika}{2} \int_0^{2\pi} \psi_{\parallel}(\theta') H_1^{(1)}(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|) d\theta' = -2ik \cos\theta \exp(-ika \cos\theta), \quad (64a)$$

- для  $H$ -поляризованной волны:

$$\psi_{\perp}(\theta) + \frac{ika}{2} \int_0^{2\pi} \psi_{\perp}(\theta') H_1^{(1)}(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|) d\theta' = 2 \exp(-ika \cos\theta). \quad (64b)$$

2.8.4 Для проверки полученного решения с известным из [1] и полученным методом собственных функций, разложим ядро уравнений (64) в ряд Фурье, как показано в [8]. Применим теорему сложения [6] к функции Ганкеля:

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(kR) &= H_0^{(1)}(k\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta - \theta')}) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \theta')) \begin{cases} J_n(kr) H_n^{(1)}(kr') & r < r', \\ J_n(kr') H_n^{(1)}(kr) & r > r', \end{cases} \end{aligned} \quad (65)$$

где  $J_n(\cdot)$  - функция Бесселя  $n$ -го порядка.

Далее учтем соотношения (63), и в результате получим [8]:

$$H_0^{(1)}(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \theta')) J_n(ka) H_n^{(1)}(ka), \quad (66a)$$

$$\begin{aligned} -\frac{ia}{4} \frac{\partial}{\partial a} H_0^{(1)}(2ka \left| \sin\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \right|) &= -\frac{ia}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \theta')) \frac{\partial}{\partial a} (J_n(ka) H_n^{(1)}(ka)) = \\ &= -\frac{ika}{4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \theta')) (J'_n(ka) H_n^{(1)}(ka) + J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka)). \end{aligned} \quad (66b)$$

В данном соотношении штрихом обозначены производные цилиндрических функций по аргументу.

Представим искомую функцию и правую часть интегральных уравнений также в виде разложения в ряд Фурье [8]:

$$\psi(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(in(\theta - \frac{\pi}{2})), \quad (67a)$$

$$\exp(-ikr \cos\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr) \exp(in(\theta - \frac{\pi}{2})). \quad (67b)$$

В результате подстановки полученных представлений функций в интегральные уравнения (67) получаем для каждой спектральной компоненты  $n$  следующие соотношения [8]:

$$a_n \left\{ 1 \pm \frac{i\pi ka}{2} (J'_n(ka) H_n^{(1)}(ka) + J_n(ka) H_n^{(1)'}(ka)) \right\} = \begin{cases} 2kJ'_n(ka), \\ 2J_n(ka). \end{cases} \quad (68)$$

В данных соотношениях верхний знак соответствует случаю  $E$ -поляризации падающей волны, нижний –  $H$ -поляризации. Далее заменяя в

скобках единицу на определитель Вронскиана, описываемый соотношением [6]:

$$\frac{i\pi ka}{2} (J'_n(ka)H_n^{(1)}(ka) - J_n(ka)H_n^{(1)'}(ka)) = 1, \quad (69)$$

получаем

- для случая  $E$ -поляризованной волны

$$a_n \frac{i\pi ka}{2} \{ J'_n(ka)H_n^{(1)}(ka) - J_n(ka)H_n^{(1)'}(ka) + J'_n(ka)H_n^{(1)}(ka) + J_n(ka)H_n^{(1)'}(ka) \} = 2kJ'_n(ka), \quad (70a)$$

- для случая  $H$ -поляризованной волны

$$a_n \frac{i\pi ka}{2} \{ J'_n(ka)H_n^{(1)}(ka) - J_n(ka)H_n^{(1)'}(ka) - J'_n(ka)H_n^{(1)}(ka) - J_n(ka)H_n^{(1)'}(ka) \} = 2J_n(ka). \quad (70a)$$

Из соотношений (70) следует, что неизвестные коэффициенты  $a_n$  определяются выражениями:

- для случая  $E$ -поляризованной волны

$$a_n = -\frac{2i}{\pi a} \frac{1}{H_n^{(1)}(ka)}, \quad (71a)$$

- для случая  $H$ -поляризованной волны

$$a_n = -\frac{2i}{\pi ka} \frac{1}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (71b)$$

Подставляя соотношения (71) в формулу (70a), получаем

- для случая  $E$ -поляризованной волны

$$\psi(\theta) = -\frac{2i}{\pi a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(in(\theta - \frac{\pi}{2}))}{H_n^{(1)}(ka)}, \quad (72a)$$

- для случая  $H$ -поляризованной волны

$$\psi(\theta) = -\frac{2i}{\pi ka} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(in(\theta - \frac{\pi}{2}))}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (72b)$$

Уравнения (72) записаны относительно скалярных компонент поверхностного электрического тока, возбуждаемого на круговом металлическом цилиндре.

Для сведения соотношений (72) к виду, приведенному в работе [1], используем известную свертку [6]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in(\theta - \frac{\pi}{2})) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\theta) \exp(-in\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(n\theta) (-i)^n, \quad (73a)$$

а также обозначения, применяемые в данных работах:

$$\psi(\theta) \rightarrow \varphi, \quad (73b)$$

где  $\varepsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ 2, & m > 0 \end{cases}$  - числа Неймана.

В результате соотношения (72) принимают вид, приведенный в работе [1], а также полученный ранее методом собственных функций:

- для случая  $E$ -поляризованной волны

$$j_z(\varphi) = -\frac{2i}{\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-i)^n \cos(n\varphi)}{H_n^{(1)}(ka)}, \quad (74a)$$

- для случая  $H$ -поляризованной волны

$$j_\varphi(\varphi) = -\frac{2i}{\pi ka} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n (-i)^n \cos(n\varphi)}{H_n^{(1)'}(ka)}. \quad (74b)$$

Анализ полученных соотношений, а также их сравнение с результатами, приведенными в работе [1], показывает, что они совпадают до знака при мнимой единице и используемых функций Ганкеля. Это определяется тем, что в работе [8], взятой для сравнения результатов, используется временная зависимость  $\exp(-i\omega t)$ , а в работе [1] -  $\exp(i\omega t)$ . Учет этого факта и переход к временной зависимости  $\exp(i\omega t)$  позволяет получить одинаковые зависимости для описания распределения плотности поверхностного электрического тока.

Таким образом, соотношения (64), описывающие интегральные уравнения для задачи о нахождении распределения поверхностного тока на круговом идеально проводящем цилиндре, справедливы.

## 2.8 Применение метода коллокации для численного решения интегрального уравнения

2.8.1 Рассмотрим применение метода коллокации для численного решения полученного интегрального уравнения. Как известно из [9], метод коллокации является частным случаем метода моментов. В связи с этим рассмотрение метода коллокации начнем с анализа схемы моментов.

С математической точки зрения метод моментов является методом решения операторной задачи:

$$L(f) = g, \quad (75)$$

где  $g$  - известная функция;

$L(f)$  - оператор, заданный в некотором пространстве функций.

Оператором называют действие, ставящее в соответствие функции функцию [9]. Наиболее простым примером оператора может служить дифференцирование, которое исходной функции ставит в соответствие другую функцию – производную. В электродинамике чаще используются интегральные операторы.

Для компактного изложения схемы метода моментов используем основное свойство скалярного произведения  $\langle f, g \rangle$  двух функций:

$$\langle f, g \rangle = \int_S fg \, dS. \quad (76a)$$

Без потери общности соотношение (76a) можно преобразовать к виду

$$\langle f, g \rangle = \int_S wfg \, dS, \quad (76b)$$

где  $w$  - некоторая весовая функция.

Далее представим неизвестную функцию  $f$  в виде разложения следующего вида:

$$f = \sum_n a_n \varphi_n, \quad (77)$$

где  $\varphi_n$  - известные функции, получившие название базисных;

$a_n$  - неизвестные коэффициенты.

Полагая, что функция  $f$  определена в некоторой области  $S$ , поставим выражение (77) в соотношение (75). В результате получим

$$\sum_n a_n L(\varphi_n) = g. \quad (78)$$

Введем еще одну систему функций  $\psi_n$ , которые называются тестовыми или пробными функциями. Умножая (78) последовательно на пробные функции с разными номерами и вычисляя соответствующие скалярные произведения

$$\sum_n a_n \langle \psi_m L(\varphi_n) \rangle = \langle \psi_m g \rangle, \quad (79)$$

получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $a_n$ . В матричной форме система линейных алгебраических уравнений имеет вид:

$$Z \bar{A} = \bar{G}, \quad (80)$$

$$\text{где } Z = \begin{bmatrix} \langle \psi_1 L(\varphi_1) \rangle & \langle \psi_1 L(\varphi_2) \rangle & \dots & \langle \psi_1 L(\varphi_N) \rangle & \dots \\ \langle \psi_2 L(\varphi_1) \rangle & \langle \psi_2 L(\varphi_2) \rangle & \dots & \langle \psi_2 L(\varphi_N) \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \psi_N L(\varphi_1) \rangle & \langle \psi_N L(\varphi_2) \rangle & \dots & \langle \psi_N L(\varphi_N) \rangle & \dots \end{bmatrix}, \quad (81a)$$

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} \langle \psi_1 g \rangle \\ \langle \psi_2 g \rangle \\ \dots \\ \langle \psi_N g \rangle \\ \dots \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \\ \dots \end{bmatrix}. \quad (81b)$$

Искомая функция при таком представлении может быть записана в виде:

$$f = \langle \bar{\varphi} Z^{-1} \bar{G} \rangle, \quad (82)$$

$$\text{где } \bar{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \\ \varphi_N \\ \dots \end{bmatrix}.$$

Приведенные выше соотношения описывают схему метода моментов. Несложно заметить, что при использовании данного метода возникают два основных вопроса:

- определение выбора весовых и пробных функций;
- определение верхнего предела суммирования  $N$ .

На выбор базисной функции большое влияние оказывает априорная информация о свойствах решения. В качестве априорной информации о виде решения используются граничные условия на отрезке существования функции  $[a, b]$ :

$$\begin{aligned} l_0 u &\equiv \alpha_0 u(a) + \beta_0(a) = \alpha, \\ l_1 u &\equiv \alpha_{10} u(a) + \beta_1(a) = \beta, \end{aligned} \quad (83)$$

где  $\alpha_i, \beta_i, \alpha, \beta$  - заданные числа, причем  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$ , ( $i=0,1$ ).

Данные условия в общем случае задают линейную связь между значениями искомого решения и его производной на концах отрезка  $[a, b]$  в отдельности.

С учетом условий (83) приближенное решение  $u^N$  задачи записывается в виде

$$u^N(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x), \quad (84)$$

в котором функция  $\varphi_0$  должна удовлетворять граничным условиям, т.е.  $l_0 \varphi_0 = \alpha$ ;  $l_1 \varphi_0 = \beta$ ; а остальные функции должны удовлетворять однородным граничным условиям, т.е.  $l_0 \varphi_k = 0$ ;  $l_1 \varphi_k = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

Для выбора верхней границы суммирования  $N$  на практике применяется понятие невязки  $\varepsilon(x)$ , определяемой соотношением

$$\varepsilon(x) = Lu^N - f(x). \quad (85)$$

После выбора базисных функций данное соотношение принимает вид:

$$\varepsilon = (L\varphi_k - f). \quad (86)$$

Различие разновидностей метода моментов заключается в выборе пробных функций и условий, накладываемых на величину невязки при получении системы линейных алгебраических уравнений. Так, для метода коллокации в качестве пробных функций используются дельта-функции, что приводит к тому, что в ряде фиксированных точек, называемых точками из интервала  $[a, b]$  невязка приравнивается нулю (выполнение граничных условий в ряде дискретных точек на некоторой поверхности):

$$\varepsilon(x_k, a_1, a_2, \dots, a_N) = 0. \quad (87)$$



2.8.2 Таким образом, метод коллокации является аналитическим приближенным методом решения краевой задачи, при котором решение разыскивается в виде линейной комбинации из линейно независимых функций вида, которая удовлетворяет граничным условиям.

Оценка качества метода, выполненная в [10] путем вычисления среднеквадратичного отклонения на отрезке решения, полученного методом коллокации, от точного решения, показала:

- качество приближенного решения повышается при увеличении количества точек коллокации;
- для быстро осциллирующих решений погрешность решения зависит не только от количества точек коллокации, но и от способа их выбора. Меньшая погрешность получается, если точки коллокации попадают на места, соответствующие пучностям колебательного процесса;
- однородность или неоднородность граничных условий практически не влияет на качество решений;
- в точках коллокации приближенные и точные решения различаются, хотя дифференциальное уравнение удовлетворяется в них точно.

Наиболее простыми случаями выбора базисных функции в методе коллокации является применение кусочно-постоянных функций (полиномов нулевого порядка):

$$\varphi_j(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \in \Delta_j, \\ 0, & \tau \notin \Delta_j. \end{cases} \quad (88)$$

При гладкой геометрии контура поверхности тела обычно применяется равномерная сетка коллокации с размещением точек в серединах отрезков разбиения. Оптимальный размер отрезков разбиения  $\Delta_j$ , как показано в [11], составляет величину порядка 0.05...0.1 длины волны.

2.8.3 В предыдущем пункте было показано, что в конечном счете решение интегрального уравнения, сводится с использованием метода коллокации к решению системы линейных алгебраических уравнений вида (80). В связи с этим кратко рассмотрим некоторые общие вопросы, связанные с их решением.

При численном решении искомый вектор  $A$  из (80) всегда будет найден с определенной ошибкой. Для оценки этой погрешности используют две широко распространенные величины:

- вектор ошибки;
- вектор невязки.

Под вектором ошибки  $\vec{e}$  в соответствии с [4] понимается разность точного и вычисленного векторов решений, а под вектором невязки  $\vec{\varepsilon}$  - вектор несоответствия между правыми и левыми частями уравнения при подстановке в это уравнение найденного решения. При этом выполняется равенство [4]:

$$Z\vec{e} = \vec{\varepsilon}. \quad (89)$$

Используемые на практике методы численного решения системы линейных алгебраических уравнений дают обычно малую невязку, но это не обязательно означает, что вектор ошибки тоже будет мал. Например, предположим, что матрица  $Z$  почти вырождена, т.е. может стать вырожденной при малых возмущениях коэффициентов. В таком случае такие малые возмущения коэффициентов могут привести к как угодно большим изменениям решения. Это является не следствием неудовлетворительных вычислительных свойств того или иного метода решения системы линейных алгебраических уравнений, а свойством исходной задачи.

Часто заранее неясно, насколько решение задачи устойчиво к небольшим изменениям исходных данных, и необходимо оценить это. Такую оценку позволяет дать понятие обусловленности матрицы [4]. В теории вычислительных методов показывается, что каждой матрице можно поставить в соответствие число обусловленности:

$$\gamma = \text{cond}(Z), \quad (90)$$

которое характеризует максимально возможное увеличение ошибки решения по сравнению с ошибкой задания правой части. Кроме того, число обусловленности таким же образом связывает решение с изменениями в коэффициентах системы линейных алгебраических уравнений и с погрешностью вычислительного процесса. Точное вычисление числа обусловленности требует большого количества действий, чем само решение системы. Однако на практике достаточно знать приближенное значение этого числа, поэтому используют упрощенные процедуры его оценки. Минимальное значение числа обусловленности единица. В случае вырождения матрицы число обусловленности может достигать 100 и выше.

## 2.9 Сравнение результатов, полученных при использовании аналитического и численного методов

2.9.1 С использованием приведенных в данном разделе соотношений были разработаны программы вычисления компонент плотности поверхностного тока на основе метода собственных функций и метода интегральных уравнений с последующим решением его методом коллокации. Тексты программ приведены в файлах «Метод собственных функций.xmcd» и «Метод ИУ.xmcd» соответственно.

Выполним сравнение полученных с использованием данных программ результатов. Начнем с оценки корректности программы решения задачи методом собственных функций. На рисунках 5 и 6 приведены результаты сравнения распределения амплитуды тока в азимутальном сечении с данными из [1] при падении соответственно  $E$ - и  $H$ -поляризованных волн. Сплошной линией показаны результаты, полученные с использованием разработанной программы, символами – известные из [1] данные. При этом рисунки с индексами «а» иллюстрируют результаты, полученные для радиуса цилиндра  $a = 0.491\lambda$ , а с индексом «б» - для радиуса цилиндра  $a = 1.91\lambda$ .

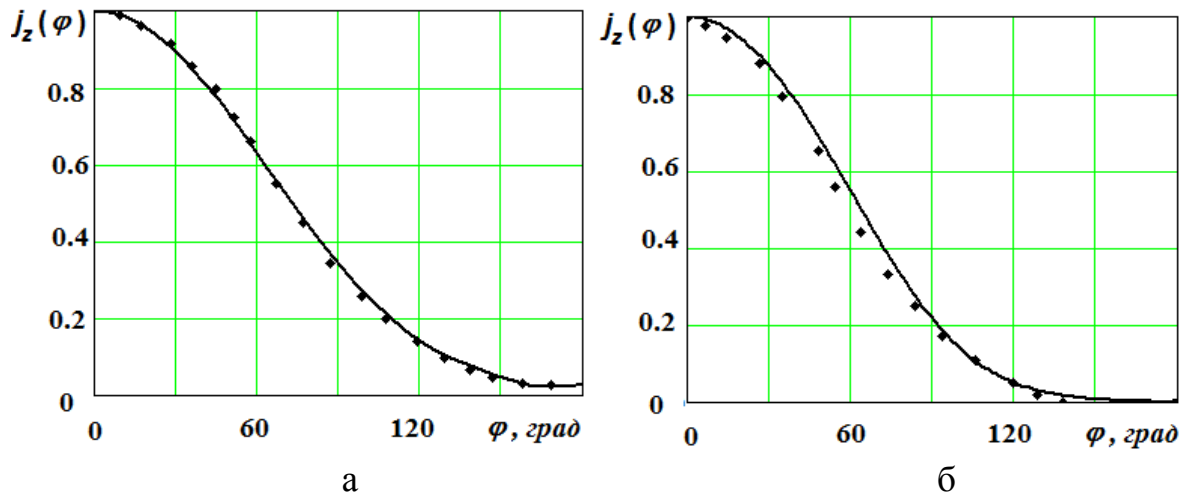


Рисунок 4 – Сравнение результатов для случая падения  $E$ -поляризованной волны

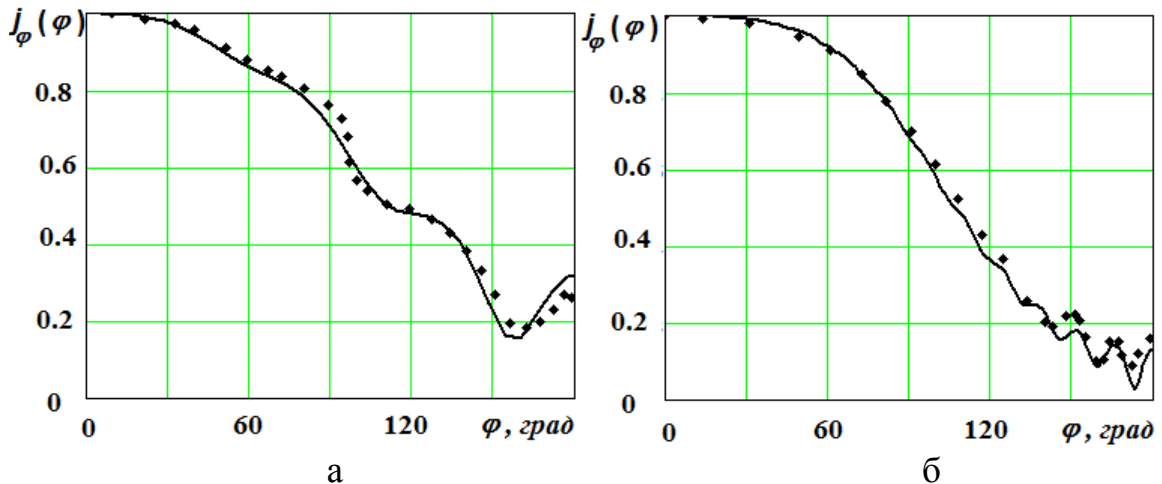


Рисунок 5 – Сравнение результатов для случая падения  $H$ -поляризованной волны

Анализ приведенных рисунков показывает хорошее согласование результатов, полученных на основе разработанной программы, с известными теоретическими данными. Так, абсолютная погрешность не превышает 6%. Некоторое расхождение графиков обусловлено неточностью оцифровки графических зависимостей, приведенных в литературе, а также особенностями построения вручную самих графиков в литературе.

2.9.2 При использовании метода коллокации для численного решения интегрального уравнений особое значение необходимо уделять правильному расположению точек коллокации, т.е. длине отрезка разбиения контура тела. На рисунке 6 приведены результаты исследований влияния величины дискрета размещения точек коллокации по контуру цилиндра на точность получаемых результатов. Величина дискрета указана на поле рисунков. Левое поле рисунка соответствует случаю падения  $E$ -поляризованной волны, правое –  $H$ -поляризованной. Сплошной линией показано решение, полученное с использованием строгого метода собственных функций, точками – приближенного решения.

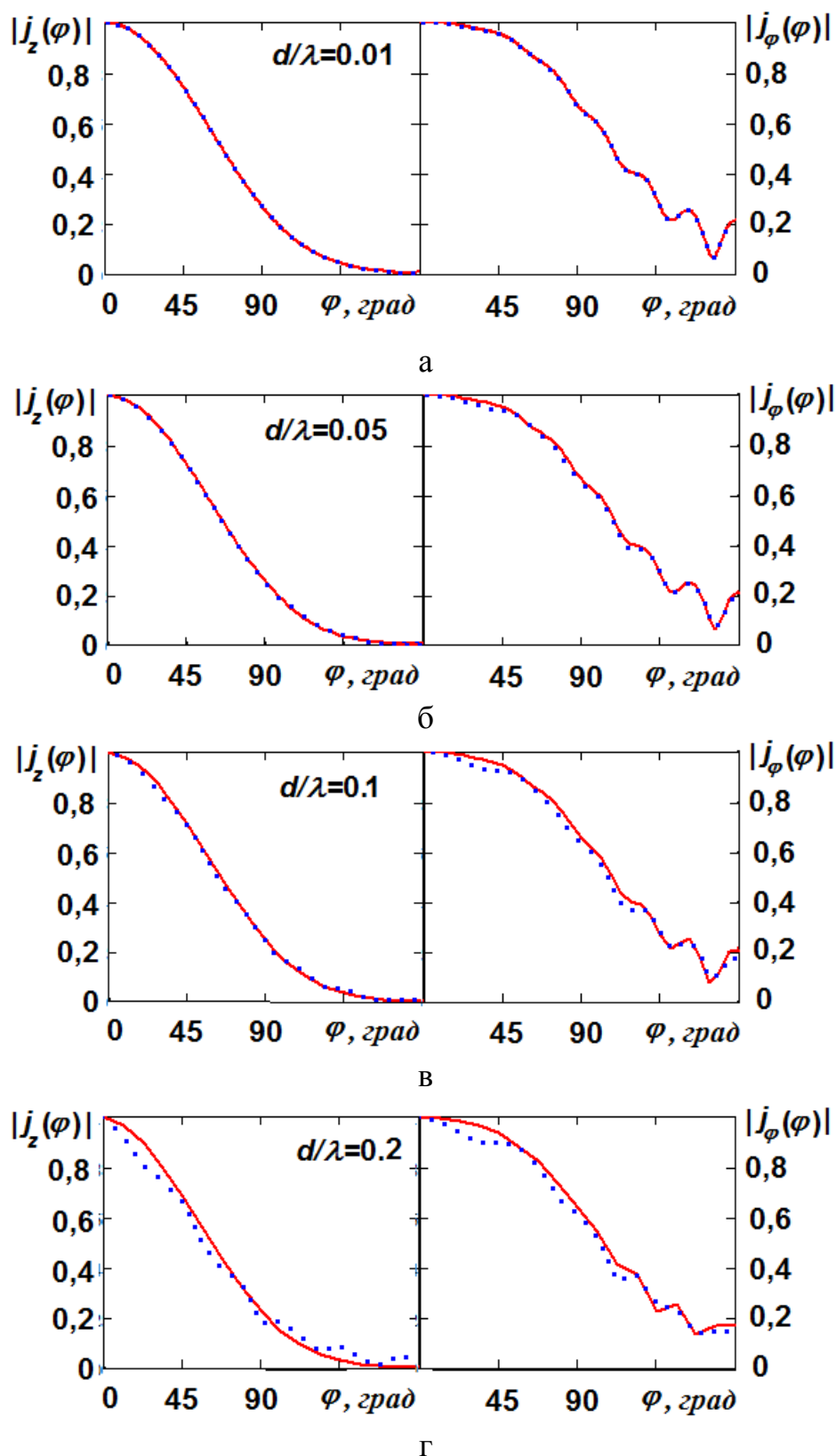


Рисунок 6 – Влияние числа точек коллокации на точность получаемого решения

Анализ полученных в ходе исследований результатов показывает, что величина дискрета разбиения контура тела с целью размещения точек коллокации оказывает существенное влияние на точность получаемого решения.

### 3 Программа подготовки к работе

1. Изучить теоретические положения, касающиеся методов решения задач дифракции плоской электромагнитной волны на круговом металлическом цилиндре.
2. Уяснить цель и порядок проведения практического занятия.
3. Ознакомиться с расчетными соотношениями, провести их анализ.
4. Подготовиться к ответам на контрольные вопросы.
5. Подготовить бланк отчета по работе.

### 4 Описание порядка работы

Работа выполняется в следующей последовательности.

1. Проведение исследований корректности программы нахождения компонент плотности поверхностного тока методом собственных функций.

На данном этапе необходимо

- выписать соотношения, описывающие компоненты плотности поверхностного электрического тока на круговом металлическом цилиндре;
- определить в качестве верхней границы ряда цилиндрических функций  $N_z$ , величину, зависящую от радиуса цилиндра в радианной мере  $ka$ . Для этого целесообразно использовать формулу, приведенную в [12]:

$$N_z(ka) = \begin{cases} -0.002107(ka)^2 + 1.432ka + 14 & ka < 100, \\ 1.045ka + 36 & ka \geq 100. \end{cases} \quad (91)$$

- определить последовательность нормировки комплексных амплитуд токов.

После выполнения перечисленных выше теоретических исследований необходимо выполнить сравнение получаемых программой результатов с данными из [1]. Для чего необходимо для каждой поляризации падающей волны, задаваемой параметром  $p$  в программе вычислить распределение токов на цилиндре, а также подсоединить соответствующий файл, содержащий контрольные цифры.

Результаты моделирования перенести в бланк отчета. Вычислить абсолютные погрешности вычислений. Записать в Таблицу 1, которая имеет вид

Т а б л и ц а 1 – Результаты сравнения данных, полученных при решении задачи методом собственных функций, с известными из [1]

Поляризация	Радиус цилиндра в длинах волн	Радиус цилиндра в радианной мере	Погрешность вычислений
$E$ -поляризация ( $p = 0$ )	0,493		
	1,91		
$H$ -поляризация ( $p = 1$ )	0,493		
	1,91		

2. Проведение исследований корректности программы нахождения компонент плотности поверхностного тока методом интегральных уравнений и численного решения уравнений методом коллокации.

На данном этапе необходимо

- выписать интегральные уравнения, описывающие нахождение компонент плотности поверхностного электрического тока на круговом металлическом цилиндре для двух случаев поляризации падающей волны;
- выполнить исследования влияния величины отрезка разбиения на точность получаемого решения. За эталон взять решение, полученное методом собственных функций.

Результаты исследований занести в Таблицу 2 отчета, имеющую вид:

Т а б л и ц а 2 - Влияние дискрета разбиения контура  
на точность получаемых результатов

Поляризация	Величина дискрета $d/\lambda$	Порядок СЛАУ $N$	Обусловленность $cond$	Относительная погрешность $ e _{\max}, \%$	Невязка $ \varepsilon _{\max} \times 10^{-15}$
$E$ -поляризация ( $p = 0$ )	0,01				
	0,05				
	0,1				
	0,2				
$H$ -поляризация ( $p = 1$ )	0,01				
	0,05				
	0,1				
	0,2				

Получаемые при этом графики распределения плотности поверхностного тока занести в бланк отчета.

3. На основании проведенных исследований, выполненных на этапах 1 и 2, выполнить сравнение эффективности применения метода собственных функций и метода интегральных уравнений для решения сформулированной задачи, сделать соответствующие выводы.

## 5 Содержание отчета

1. Рисунки, поясняющие геометрию задачи.
2. Используемые расчетные соотношения.
3. Заполненные таблицы 1 и 2.
4. Графики, заданные в описании практического занятия.
5. Краткие выводы по работе.

## 6 Контрольные вопросы

1. Какие методы используются для решения краевых задач электродинамики?

2. Что относится к краевым задачам электродинамики?
3. Когда могут быть использованы строгие методы решения? Каковы их достоинства и недостатки?
4. В каких случаях применяются численные методы?
5. Каковы достоинства и недостатки численных методов?

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Никольский В.В., Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Наука, 1980. 544 с.
2. Вычислительные методы в современной радиофизике / Под ред. В.Ф. Кравченко. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 464 с.
3. Вычислительные методы прикладной электродинамики / Под ред. Г.П. Синявского. М.: Радиотехника, 2009. 160 с.
4. Пименов Ю.В. Линейная макроскопическая электродинамика. Вводный курс для радиофизиков и инженеров. Долгопрудный: Изд. дом «Интеллект», 2008. 536 с.
5. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. - М.: Радио и связь, 1988. 440с.
6. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М: Наука, 1979. 832 с.
7. Петров Б.М. Электродинамика и распространения радиоволн. М.: Радио и связь, 2000.
8. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
9. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967.
10. Буянхишиг Р., Гантулга О., Кузнецов Л.А. Экспериментальное исследование качества решения линейной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка методом коллокации // ВС/NW. 2007. №1 (10):16.1. [Электронный ресурс]: URL: <http://network-journal.mpei.ac.ru/cgi-bin/main.pl?l=ru&n=10&pa=16&ar=1>. (дата обращения 29.03.2012г.).
11. Галишникова Т.Н., Ильинский А.С. Численные методы в задачах дифракции. М.: Изд-во МГУ, 1987. 208 с.